

THÈSE

Présentée par

**Olivier GAGLIARDINI**

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et 30 mars 1992)

Spécialité : Géomécanique, Géophysique

**SIMULATION NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT  
BIDIMENSIONNEL DE GLACE POLAIRE PRESENTANT UNE  
ANISOTROPIE INDUITE EVOLUTIVE.**

*version électronique du 30 septembre 2004*

Soutenue le 7 janvier 1999 devant la commission d'examen composée de :

M. Jean-Louis AURIAULT	Président
M. Pierre GILORMINI	Rapporteur
M. Kolumban HUTTER	Rapporteur
M. Yvan CHASTEL	Examineur
M. David MAINPRICE	Examineur
M. Jacques MEYSSONNIER	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du

Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement - CNRS  
54, rue Molière - BP 96 - 38 402 Saint-Martin-d'Hères Cedex France  
Tel (33) 04 76 82 42 00 - Fax (33) 04 76 82 42 01



# Merci !

**Merci** à Jacques Meyssonier pour sa *direction*, discrète mais efficace, ainsi que pour toutes les discussions, scientifiques ou non, que nous avons eu au cours de ces quatre années.

**Merci** à Kolumban Hutter et Pierre Gilormini pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté d'en être les rapporteurs.

**Merci** à David Mainprice, Yvan Chastel et Jean-Louis Auriault de m'avoir fait l'honneur de participer à la commission d'examen.

**Merci** au SPI du CNRS de m'avoir accordé une bourse BDI pour financer ces trois années de thèse.

**Merci** à l'Université Joseph Fourier - Grenoble I pour le poste d'ATER qui m'a permis de terminer ce travail dans de bonnes conditions.

**Merci** à l'European Science Foundation pour son soutien financier lors de ma visite au Laboratoire du Prof. Morland et aussi pour l'école d'été de Karthaus.

**Merci** à Bruno, Olivier, Philippe, Patrick et aux autres thésards de galère au LGGE.

**Merci** aux permanents du LGGE pour les discussions scientifiques mais aussi pour celles relatives aux activités d'enseignement.

**Merci** au personnel technique et administratif du LGGE pour son aide et son soutien au cours de ces quatre années.



*à Fouf,*  
*à Léa, Malo et Coline,*



# Résumé

L'observation de l'orientation des grains des carottes forées en Antarctique et au Groenland montre que la glace polaire acquiert une fabrique représentative de l'histoire des déformations qu'elle a subies. Le comportement viscoplastique du cristal de glace étant fortement anisotrope, il en résulte une anisotropie macroscopique du polycristal qui dépend des orientations préférentielles des grains qui le composent.

A l'échelle du polycristal, le comportement viscoplastique est obtenu par homogénéisation sur tous les cristaux, en supposant leur comportement linéaire orthotrope de révolution et une répartition homogène des contraintes dans tout le polycristal (modèle statique). La fabrique du polycristal est décrite par une fonction continue de distribution des orientations (ODF). Avec ces hypothèses, nous avons obtenu des résultats analytiques pour le comportement orthotrope d'un polycristal et l'évolution de sa fabrique, qui permettent de représenter la fabrique par une ODF ne dépendant que de trois paramètres.

A l'échelle de la calotte polaire, les champs de vitesses et fabriques de l'écoulement stationnaire sont calculés par une méthode couplée, qui alterne :

- le calcul des vitesses, pour un champ de fabriques donné, par la méthode des éléments finis,
  - le calcul de la fabrique, pour un champ de vitesses donné, par une méthode qui utilise les lignes de courant de l'écoulement,
- jusqu'à ce que la convergence soit atteinte, à la fois sur les vitesses et la fabrique.

Nous étudions l'influence du champ de températures et du comportement du grain sur la formation des fabriques au sein des calottes polaires. Le modèle est appliqué à la ligne d'écoulement GRIP-GISP2 (Groenland Central) et les résultats sont comparés aux mesures de terrain.





# Abstract

Observations of crystal orientations on deep ice-cores from Antarctica and Greenland have shown that polar ice acquires a fabric, characteristic of the strain-history it has undergone. Since the viscoplastic behaviour of the ice single crystal is strongly anisotropic, the macroscopic anisotropic behaviour of polycrystalline ice depends on the preferred orientation of its grains.

At the scale of the ice polycrystal, the ice fabric is described by a continuous orientation distribution function (ODF) and the mechanical behaviour is obtained by assuming a linear transversely isotropic behaviour of each grain and a uniform state of stresses in the polycrystal (static model). With these assumptions, we have developed analytical results for the behaviour of the polycrystal and its fabric evolution, which allows the description of the fabric with only three parameters.

At the scale of the ice sheet, the velocity and fabric fields of the stationary flow are solved by using a coupled method:

- for a given fabric field, the corresponding velocity field is computed by the finite element method,

- for a given velocity field, the corresponding field of fabrics is obtained by calculating fabric evolution along the flow streamlines,

this two steps process being iterated until convergence is achieved.

We show the influence of both temperature field and grain behaviour on fabric development in the ice sheet. We apply our model to the flow line going from GRIP to GISP2 (Central Greenland) and the results are compared to field data.



# Table des matières

Merci !	iii
Résumé	vii
Abstract	ix
Notations	xv
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Du cristal de glace aux calottes polaires ...</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Comportement viscoplastique du cristal de glace . . . . .	6
1.2.1 Structure cristallographique et défauts . . . . .	6
1.2.2 Anisotropie du cristal de glace . . . . .	7
1.3 Comportement de la glace polycristalline . . . . .	9
1.3.1 Comportement de la glace isotrope . . . . .	9
1.3.2 Textures des glaces polaires . . . . .	12
1.3.3 Comportement de la glace polycristalline anisotrope . . . . .	14
1.3.4 Localisation des différents processus au sein des calottes polaires .	14
1.4 Modélisation des phénomènes observés . . . . .	15
1.4.1 Modèles de comportement du grain . . . . .	15
1.4.2 Modèles de description de la fabrique : grains discrets ou ODF . .	16
1.4.3 Modèles de comportement du polycristal anisotrope . . . . .	18
1.4.4 Modèles d'évolution de la fabrique . . . . .	20
1.4.5 Modèles de calottes polaires . . . . .	21
1.4.6 Modèles multi-échelles . . . . .	22
1.5 Conclusion . . . . .	23
<b>2 Modèle de comportement du cristal de glace.</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Modèle viscoplastique adopté . . . . .	25
2.2.1 Comportement linéaire . . . . .	25
2.2.2 Comportement non-linéaire . . . . .	28
2.3 Comparaison avec le modèle à trois plans de glissement . . . . .	29
2.4 Conclusion . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Evolution de la fabrique du polycristal de glace</b>	<b>33</b>
3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Equations descriptives de l'évolution de la fabrique . . . . .	33
3.2.1	Hypothèses . . . . .	33
3.2.2	Rotation de l'axe- $c$ d'un grain . . . . .	35
3.2.3	Equation locale de la conservation du nombre de grains . . . . .	36
3.3	Prédiction des fabriques . . . . .	37
3.3.1	Compression et traction . . . . .	38
3.3.2	Cisaillement pur . . . . .	38
3.4	Solutions analytiques pour l'ODF . . . . .	38
3.4.1	Hypothèses supplémentaires . . . . .	40
3.4.2	Expression de l'ODF dans le cas d'un chargement plan . . . . .	41
3.4.3	Compression-traction selon $e_3$ . . . . .	44
3.4.4	Cisaillement pur . . . . .	45
3.4.5	Adaptation au modèle de Taylor . . . . .	48
3.5	ODF paramétrée . . . . .	48
3.5.1	Fabrique orthotrope . . . . .	48
3.5.2	Forme des fabriques en fonction de la valeur des paramètres . . . . .	49
3.5.3	Comparaison avec l'ODF paramétrée de Lliboutry (1993) . . . . .	50
3.6	Méthodes numériques appliquées au calcul de l'évolution de la fabrique . . . . .	52
3.6.1	Grains discrets . . . . .	52
3.6.2	ODF discrétisée . . . . .	52
3.6.3	ODF paramétrée . . . . .	53
3.7	Conclusion . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Modèle de comportement du polycristal de glace anisotrope</b>	<b>57</b>
4.1	Introduction . . . . .	57
4.2	Le modèle à contraintes homogènes . . . . .	57
4.2.1	Hypothèses . . . . .	57
4.2.2	Vitesses de déformation macroscopiques . . . . .	58
4.3	Homogénéisation du polycristal de glace orthotrope . . . . .	59
4.3.1	Comportement linéaire . . . . .	60
4.3.2	Comportement non-linéaire ( $n = 3$ ) . . . . .	64
4.4	Conclusion . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Evolution conjuguée de la fabrique et du comportement du polycristal de glace</b>	<b>69</b>
5.1	Introduction . . . . .	69
5.2	Evolution des propriétés mécaniques en compression-traction . . . . .	69
5.2.1	Cinématique de la déformation . . . . .	69
5.2.2	Compression-traction . . . . .	70
5.2.3	Comparaison avec un modèle auto-cohérent . . . . .	73
5.2.4	Compression - traction en déformations planes . . . . .	77
5.3	Modélisation de la fabrique de GRIP . . . . .	79
5.4	Tests numériques de cisaillement simple . . . . .	81
5.4.1	Cinématique de la déformation . . . . .	81

5.4.2	Evolution de la fabrique et des propriétés du matériau . . . . .	82
5.4.3	Discussion . . . . .	85
5.5	Conclusion . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Ecoulement de glace anisotrope</b>	<b>89</b>
6.1	Introduction . . . . .	89
6.2	Problème à résoudre . . . . .	89
6.2.1	Types d'écoulement étudiés . . . . .	89
6.2.2	Loi de comportement de la glace orthotrope . . . . .	89
6.2.3	Equations du problème . . . . .	91
6.2.4	Conditions aux limites . . . . .	93
6.3	Méthodes numériques . . . . .	93
6.3.1	Formulation variationnelle . . . . .	93
6.3.2	Méthode des éléments finis . . . . .	94
6.3.3	Adimensionnement . . . . .	95
6.4	Géométrie de la calotte étudiée . . . . .	95
6.4.1	Profil de Vialov (1958) . . . . .	95
6.4.2	Le maillage . . . . .	96
6.5	Comparaison d'écoulements . . . . .	98
6.5.1	Valeurs des paramètres de comparaison . . . . .	98
6.5.2	Influence de la fabrique . . . . .	101
6.5.3	Influence de la température . . . . .	102
6.5.4	Influence du comportement du grain . . . . .	105
6.5.5	Influence du type d'écoulement . . . . .	107
6.6	Conclusion . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Evolution de la fabrique pour un champ de vitesses donné</b>	<b>113</b>
7.1	Introduction . . . . .	113
7.2	Evolution de la fabrique le long d'une ligne de courant . . . . .	113
7.2.1	Problème à résoudre . . . . .	113
7.2.2	Méthode des lignes de courant . . . . .	114
7.2.3	Adimensionnement . . . . .	115
7.3	Comparaison des quatre méthodes . . . . .	115
7.3.1	Nombre de paramètres et temps de calcul . . . . .	115
7.3.2	Principe de la comparaison . . . . .	116
7.3.3	Validation de l'ODF paramétrée . . . . .	118
7.4	Calcul du champ de fabriques . . . . .	125
7.4.1	Méthode numérique . . . . .	125
7.4.2	Application . . . . .	125
7.5	Conclusion . . . . .	127
<b>8</b>	<b>Calcul couplé des champs de vitesses et de fabriques</b>	<b>131</b>
8.1	Introduction . . . . .	131
8.2	Méthodes numériques . . . . .	131
8.2.1	Critères de convergence . . . . .	132
8.2.2	Unicité de la solution à la convergence . . . . .	132

8.2.3	Instabilités numériques . . . . .	133
8.3	Application à une calotte de géométrie simplifiée . . . . .	135
8.3.1	Influence du champ de températures . . . . .	135
8.3.2	Influence du comportement du grain . . . . .	141
8.3.3	Influence du type de l'écoulement . . . . .	141
8.4	Application à la ligne d'écoulement GRIP-GISP2 . . . . .	144
8.4.1	Situation des forages et données de terrain . . . . .	144
8.4.2	Vitesses . . . . .	146
8.4.3	Fabrique . . . . .	148
8.4.4	Datation . . . . .	150
8.5	Conclusion . . . . .	152
	<b>Conclusion</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Loi de comportement du cristal de glace</b>	<b>159</b>
<b>B</b>	<b>Etude de la stabilité des positions d'équilibre des grains</b>	<b>161</b>
<b>C</b>	<b>Polycristal orthotrope non-linéaire</b>	<b>163</b>
<b>D</b>	<b>Stabilité en cisaillement simple des fabriques à un seul maximum</b>	<b>169</b>
<b>E</b>	<b>ODF analytique pour un cisaillement simple dans l'hypothèse de Taylor</b>	<b>171</b>
<b>F</b>	<b>Inversion de la loi de comportement dans le cas linéaire</b>	<b>173</b>
<b>G</b>	<b>Profil de Vialov (1958)</b>	<b>177</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>

# Notations

## Référentiels

Dans la suite, nous utilisons principalement trois référentiels :

- $\{R\}$  un référentiel *fixe* de référence lié à la Terre, dans lequel sont décrites les symétries de l'écoulement de la calotte polaire modélisée (écoulement en déformations planes ou axisymétrique),
- $\{^oR\}$  un référentiel d'orthotropie lié au polycristal de glace orthotrope, dans lequel sont décrites les symétries du polycristal de glace,
- $\{^gR\}$  un référentiel lié au grain, dans lequel sont décrites les symétries du monocristal de glace.

Une quantité  $x$  (vecteur ou matrice) est notée  $x$ ,  $^ox$  ou  $^gx$  selon qu'elle est exprimée par rapport au référentiel  $\{R\}$ ,  $\{^oR\}$  ou  $\{^gR\}$  respectivement.

## Tenseur, vecteur et scalaire

$A, a, \phi$	Grandeurs scalaires
$\mathbf{a}, \mathbf{c}$	Vecteurs $a_i, c_i$
$\mathbf{A}$	Tenseur du 2 <sup>ème</sup> ordre $A_{ij}$
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{C}$	Produit tensoriel $a_i b_j = C_{ij}$
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{C}$	Simple contraction $A_{ik} B_{kj} = C_{ij}$
$\mathbf{A} : \mathbf{B} = C$	Double contraction $A_{ij} B_{ij} = C$
$\mathbf{A}^t$	Transposé du tenseur $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$	Partie déviatoire de $\mathbf{A}$

Les quantités (scalaire, vecteur ou matrice) relatives au polycristal ou à la calotte sont notées avec une barre supérieure. Par exemple, le tenseur des contraintes déviatoires macroscopiques est noté :  $\bar{\mathbf{S}}$ .

Les quantités relatives à un grain sont sans annotation particulière. Par exemple, le tenseur des vitesses de déformation dans un grain est noté :  $\mathbf{D}$ .

En notant  $\mathbf{R}$  la matrice de rotation pour passer du repère du grain  $\{^gR\}$  au repère de référence  $\{R\}$  (donnée par (2.1)), la formule de passage d'un repère à l'autre est  $\mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{a}$  pour les vecteurs et  $\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^t$  pour les matrices.

## Quantités utilisées dans le manuscrit

$\bar{A}, \dots, \bar{H}, \bar{J}$	Coefficients de la matrice de fluidité du polycristal
$A_i, A_\lambda$	Paramètres de l'histoire des contraintes ( <b>Chap. 3</b> )
$B_n$	Paramètre de la loi de Glen (Fluidité)
$\mathbf{c}$	Vecteur unitaire définissant l'axe- $c$ du grain
$\mathbf{D}$	Tenseur des vitesses de déformation
$\mathbf{d}$	Vecteur des vitesses de déformation en notation de Voigt
$\mathbf{e}_i$	Vecteurs unitaires définissant une base orthonormée directe
$f(\theta, \varphi, \mathbf{x}, t)$	Fonction de distribution des orientations (ODF)
$\mathbf{I}$	Tenseur identité
$J_{pq}$	Intégrale de l'ODF définissant l'anisotropie macroscopique
$k_1, k_2, k_3$	Paramètres de l'ODF paramétrée ( <b>Chap. 3</b> )
$k_{min}$	Valeur minimum des paramètres $k_i$
$\mathbf{L}$	Tenseur gradient des vitesses
$\mathbf{M}_i$	Tenseur de structure
$\mathbf{R}$	Matrice de rotation définissant la position du grain
$\{\mathbf{R}\}$	Référentiel fixe de référence
$\{^g\mathbf{R}\}$	Repère lié au grain
$\{^o\mathbf{R}\}$	Repère d'orthotropie du matériau
$\mathbf{S}$	Tenseur des contraintes déviatoires
$\mathbf{s}$	Vecteur des contraintes déviatoires en notation de Voigt
$T$	Température
$t$	Temps
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse
$\mathbf{W}$	Tenseur des vitesses de rotation
$\mathbf{x}$	Vecteur position
$\bar{\alpha}_r$	Coefficients de la loi du polycristal orthotrope ( <b>Chap. 4</b> )
$\bar{\alpha}_r^*$	Coefficients de la loi du polycristal orthotrope de révolution
$\beta$	Paramètre définissant le comportement du grain ( <b>Chap. 2</b> )
$\gamma$	Paramètre définissant le comportement du grain ( <b>Chap. 2</b> )
$\theta$	Angle définissant la position du grain (co-latitude)
$\kappa$	Mesure de la déformation en cisaillement simple
$\lambda$	Angle définissant la position du repère des contraintes principales
$\lambda_i$	Dilatation dans la direction $\mathbf{e}_i$
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$\phi_S$	Potentiel de dissipation
$\varphi$	Angle (longitude) définissant la position du grain dans le repère de référence $\{\mathbf{R}\}$
$\varphi^o$	Paramètre d'orientation de l'ODF paramétrée ( <b>Chap. 3</b> )
$\psi$	Fluidité dans le plan de base du grain ( <b>Chap. 2</b> )



# Introduction

Le rôle important des calottes polaires dans le système climatique motive les efforts entrepris pour modéliser leur évolution. Cette modélisation a pour objectifs d'une part l'étude de la réaction des calottes polaires à une variation du climat, d'autre part une aide à l'interprétation des enregistrements climatiques tirés de l'analyse des forages profonds en Antarctique ou au Groenland, en proposant des datations.

Un modèle de calotte polaire permet d'obtenir les champs des vitesses et des températures, pour une géométrie (altitude de la surface, topographie du socle) et des conditions aux limites fixées (accumulation, conditions aux bords et à l'interface glace-socle). La datation d'une carotte est obtenue en calculant les lignes de courant correspondant au champ de vitesses donné par le modèle, et l'évolution d'une calotte polaire, en réponse à une variation climatique donnée, est obtenue en faisant varier les conditions aux limites appliquées.

L'application d'un tel modèle à la simulation d'une calotte réelle implique la manipulation d'un nombre considérable de données (notamment pour rendre compte de la topographie) et, lorsque c'est possible, de paramétrisations qui permettent d'en réduire le nombre (par exemple avec un modèle pour la répartition de l'accumulation en surface Ritz, 1992). Un modèle de calotte polaire est donc en soi un objet très complexe.

Pour comprendre les interactions entre climat et calottes polaires, il est nécessaire de réaliser les couplages avec d'autres modèles, comme un modèle de circulation atmosphérique globale (Fabre *et al.*, 1997), ou un modèle reproduisant la variation du niveau des mers (qui va influencer les conditions d'écoulement sur les bords), ou encore un modèle d'isostasie qui rendra compte de la réponse du socle aux variations d'épaisseur de la calotte. La complexité facilement imaginable d'une telle entreprise, fait que le modèle de calotte polaire utilisé doit vraiment être considéré comme un outil (usuel et efficace) et non pas comme un prototype plus ou moins délicat à manipuler.

Dans ce contexte vient s'ajouter une difficulté liée à la description du comportement mécanique de la glace polaire, dont la loi constitutive doit être prise en compte par le modèle d'écoulement. A ce jour, ces modèles, dans leur majorité, prennent en compte un modèle de glace isotrope, semblable à celui utilisé pour reproduire l'écoulement des glaciers de type alpin. Cependant les analyses de la structure des glaces polaires profondes, effectuées sur des carottes extraites en différents sites de l'Antarctique et du Groenland, ont révélé qu'au cours de sa déformation, sous très faibles contraintes déviatoires, la glace polaire acquiert une fabrique (orientation préférentielle des grains) et devient anisotrope. Compte tenu de l'énorme anisotropie plastique du monocristal, cette anisotropie macroscopique induite va influencer très fortement l'écoulement des calottes polaires et doit

être prise en compte dans leur modélisation. A l'heure actuelle, cet effort de modélisation fait partie des priorités scientifiques de la Glaciologie, notamment au niveau Européen puisque le travail présenté dans ce manuscrit a été réalisé dans le cadre d'un contrat Européen spécifique (*Environnement and Climate: "Fabric development and rheology of polar ice for ice sheet flow modelling"*).

Une expérimentation en laboratoire reproduisant les conditions qui régissent dans une calotte et mettant en jeu les mécanismes de déformation associés, est exclue, à cause des très faibles vitesses de déformation qui en résulteraient (de l'ordre de  $10^{-12} s^{-1}$ ). Par conséquent, on est réduit à construire des modèles de comportement, si possible basés sur les mécanismes physiques mis en jeu, et qui ne peuvent être testés que vis à vis de mesures de terrain. Une autre difficulté est que pour être utilisées, ces dernières doivent être interprétées à travers des simulations de l'écoulement aussi réalistes que possible.

Le but du travail présenté dans ce mémoire était d'établir un modèle pour le comportement de la glace polaire anisotrope et pour l'évolution de sa texture, et de le mettre en oeuvre dans la simulation numérique d'un écoulement de glace anisotrope, ceci dans des configurations géométriques simples (écoulement plan ou axisymétrique, socle fixe), et pour des conditions aux limites fixées. La contrainte essentielle était de construire un modèle qui reste assez simple pour être pratiquement utilisable dans un code de calcul d'écoulement (et d'évolution) de calotte polaire, considéré comme un outil, c'est à dire qui minimise le surplus d'information nécessaire au traitement de l'anisotropie, et également les temps de calcul.

Pour ces raisons, le modèle auto-cohérent développé par Castelnau (1996) ne nous a pas semblé adapté à notre problème, malgré son efficacité à décrire le comportement de la glace anisotrope. Nous avons donc adopté le modèle à contraintes homogènes (modèle statique), beaucoup plus simple dans son formalisme, mais qui semble conduire néanmoins à de bons résultats pour la glace (Castelnau, 1996). Toujours pour ces mêmes raisons, et contrairement aux modèles à contraintes homogènes qui décrivent la fabrique par des grains discrets (Chastel *et al.*, 1993), dans notre modèle la fabrique est décrite par une fonction continue dépendante de quelques paramètres seulement.

Le plan de ce manuscrit suit les étapes qui constituent l'élaboration de notre modèle, du cristal de glace aux calottes polaires. Après une étude bibliographique, présentée au **Chapitre 1**, qui rappelle les résultats expérimentaux obtenus sur la glace et présente les différents modèles de comportement de la glace polycristalline, le **Chapitre 2** propose la loi adoptée pour décrire le comportement viscoplastique anisotrope du monocristal de glace.

Ensuite, des résultats analytiques obtenus en supposant le polycristal orthotrope linéaire, sont présentés pour l'évolution de la fabrique au **Chapitre 3**, pour le comportement du polycristal au **Chapitre 4** et pour l'évolution conjuguée de la fabrique et du comportement dans le **Chapitre 5**.

Enfin, en adoptant une ODF continue fonction de trois paramètres seulement, nous incorporons la loi micro-macro du polycristal de glace dans un code aux éléments finis. Le **Chapitre 6** présente la modélisation de l'écoulement d'une calotte de glace dont le champ de fabriques est donné, puis, dans le **Chapitre 7** nous mettons en place la méthode permettant le calcul du champ de fabriques stationnaire correspondant à un

écoulement donné.

Dans le **Chapitre 8**, nous couplons les deux méthodes précédentes pour déterminer les champs de vitesses et fabriques correspondant à l'écoulement stationnaire d'une calotte de géométrie simplifiée donnée. Nous étudions l'influence d'un champ de températures (donné) et du comportement du grain sur les champs de vitesses et de fabriques à la convergence du problème couplé. Finalement, nous appliquons le modèle couplé à la ligne d'écoulement reliant les forages profonds de GRIP et GISP2 (Groenland Central) et nous comparons les champs de vitesses et fabriques obtenus aux mesures de terrain.

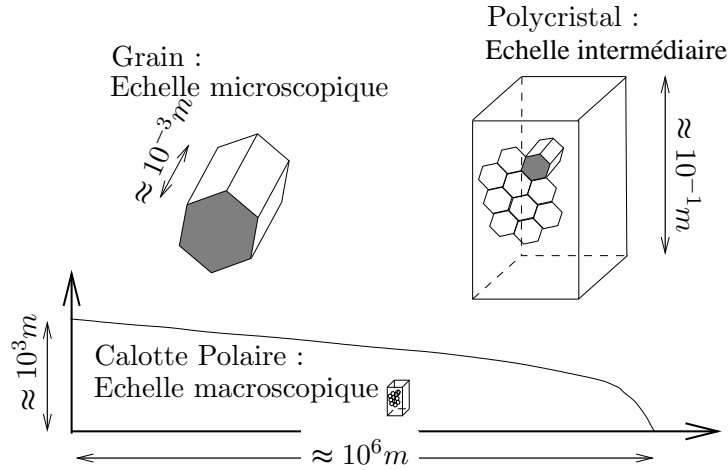


# Chapitre 1

## Du cristal de glace aux calottes polaires ...

### 1.1 Introduction

Le diamètre d'un grain de glace est de quelques millimètres à quelques dizaines de centimètres, tandis que la surface de la calotte polaire Antarctique est de  $12\,700\,000\text{ km}^2$ , soit une longueur caractéristique de l'ordre de  $3\,500\text{ km}$ , pour une profondeur moyenne de  $2\,160\text{ m}$  (Drewry *et al.*, 1982). La Figure 1.1 présente de façon schématique les dimensions caractéristiques du cristal de glace, du polycristal de glace<sup>1</sup> et de la calotte polaire.



*Le grain, le polycristal, la calotte polaire et leurs dimensions caractéristiques.*

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps des résultats expérimentaux d'essais mécaniques réalisés sur des cristaux de glace ainsi que sur de la glace polycristalline isotrope et anisotrope. Ces essais de laboratoire mettent en jeux des mécanismes de

---

<sup>1</sup>Nous appellerons “polycristal” un ensemble de quelques centaines de grains, même si, théoriquement, la calotte entière peut-être considérée comme un “gros” polycristal.

déformation bien spécifiques puisque ils sont généralement réalisés sous des contraintes élevées ( $\sigma > 0.2 \text{ MPa}$ ). Nous discutons la validité de ces essais pour une application à la glace des calottes polaires dans lesquelles le déviateur des contraintes est beaucoup plus faible ( $\sigma < 0.1 \text{ MPa}$ ). Nous analysons plus particulièrement quels peuvent être les différents mécanismes de déformation du polycristal *in-situ* en fonction de sa position dans la calotte polaire.

Ensuite, dans un deuxième temps, nous présentons les modèles de la littérature qui décrivent le comportement viscoplastique du grain, puis les différents types de modèles de glace polycristalline anisotrope. Enfin, nous présentons les hypothèses des différents modèles d'écoulement de calotte polaire ainsi que leurs spécificités.

## 1.2 Comportement viscoplastique du cristal de glace

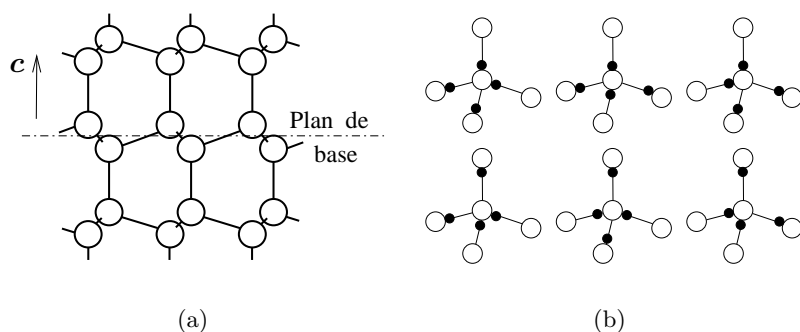
### 1.2.1 Structure cristallographique et défauts

Dans les conditions de pression et température rencontrées sur Terre, la structure cristallographique du monocristal de glace présente un axe de symétrie hexagonale [0001], appelé axe optique ou encore axe- $c$ . Ce type de glace est appelé glace Ih. La Figure 1.1 présente la forme du réseau cristallin occupé par les atomes d'oxygène et les six orientations possibles de la molécule d'eau. Les atomes d'oxygène sont liés par une force de liaison dite liaison hydrogène.

Outre les défauts classiques des réseaux cristallins (ponctuels ou linéaires), la glace Ih présente des défauts de position des protons. Ces défauts correspondent à la violation des règles de Bernal et Fowler (1933) selon lesquelles chaque atome d'oxygène doit avoir deux protons à proximité (conservation de la structure de la molécule d'eau) et chaque liaison  $O - O$  ne doit comporter qu'un seul proton. Lorsqu'un proton passe d'une molécule d'eau à l'autre de part et d'autre de sa liaison hydrogène, il y a création d'une paire de défauts ioniques ( $OH^-$  et  $H_3O^+$ ). Lorsqu'une molécule d'eau tourne de  $2\pi/3$  autour d'une des liaisons  $O - O$ , il y a création d'un défaut rotationnel de Bjerrum de type L (*leer*, suppression d'une liaison hydrogène entre deux oxygènes) ou D (*doppelt*, liaison occupée par deux protons).

Pour la glace Ih, seul l'arrangement cristallin des atomes d'oxygène présente une structure tripériodique et les dislocations observées correspondent donc à des perturbations linéaires de cet arrangement. L'observation par topographie aux rayons X montre que la quasi totalité des dislocations ont leur vecteur de Burgers contenu dans le plan de base. Du fait de la symétrie hexagonale, ces dislocations sont soit parallèles au vecteur de Burgers (dislocations vis), soit à  $60^\circ$  du vecteur de Burgers (dislocations  $60^\circ$ ) (Petrenko et Whitworth, 1994). Un calcul énergétique montre qu'en majorité les dislocations dans la glace sont basales de type vis. Par ailleurs, on n'observe pas pour la glace de glissement des dislocations vis sur les plans non basaux (Petrenko et Whitworth, 1994). Ceci confère au monocristal de glace un comportement viscoplastique fortement anisotrope.

Une particularité de la glace est que la vitesse des dislocations, proportionnelle à la contrainte appliquée, est très faible comparée à celles observées dans les métaux. Par exemple, pour le monocristal de glace, la vitesse de déplacement est de  $0.2 \mu\text{ms}^{-1}$  à une température de  $255\text{K}$  (soit pour un rapport  $T/T_f = 0.93$  où  $T_f$  est la température de fusion) et une contrainte de  $0.1 \text{ MPa}$ , alors qu'elle est de  $8 \text{ ms}^{-1}$  pour le cuivre à



**Fig. 1.1 :** (a) Position des atomes d'oxygène dans la glace Ih. Les traits représentent les liaisons hydrogène. (b) Les six orientations possibles pour la molécule d'eau. Les cercles vides représentent les atomes d'oxygène et les cercles pleins les atomes d'hydrogène.

293K ( $T/T_f = 0.21$ ) sous une contrainte de 0.25 MPa (Plé, 1998). Le rôle du désordre protonique, qui constituerait un obstacle à l'avancée des dislocations, est invoqué pour expliquer cette faible vitesse (Petrenko et Whitworth, 1994).

### 1.2.2 Anisotropie du cristal de glace

La Figure 1.2 (Duval *et al.*, 1983) compare les vitesses de déformation minimales obtenues pour la glace polycristalline isotrope et pour le monocristal de glace en fonction de la contrainte appliquée. Cette figure montre que le mécanisme principal de déformation du monocristal est le glissement dans les plans de base. A contrainte équivalente égale, la vitesse de déformation d'un monocristal sollicité de façon à avoir une cisssion nulle dans les plans de base (courbe du bas) est de quatre ordres de grandeur inférieure à celle obtenue si la cisssion dans le plan de base est maximale (courbe du haut). A contrainte égale, la vitesse de déformation en cisaillement parallèlement au plan de base du monocristal est environ mille fois plus élevée que celle du polycristal isotrope.

Le fluage secondaire du monocristal déformé par glissement basal est bien décrit par une loi puissance :

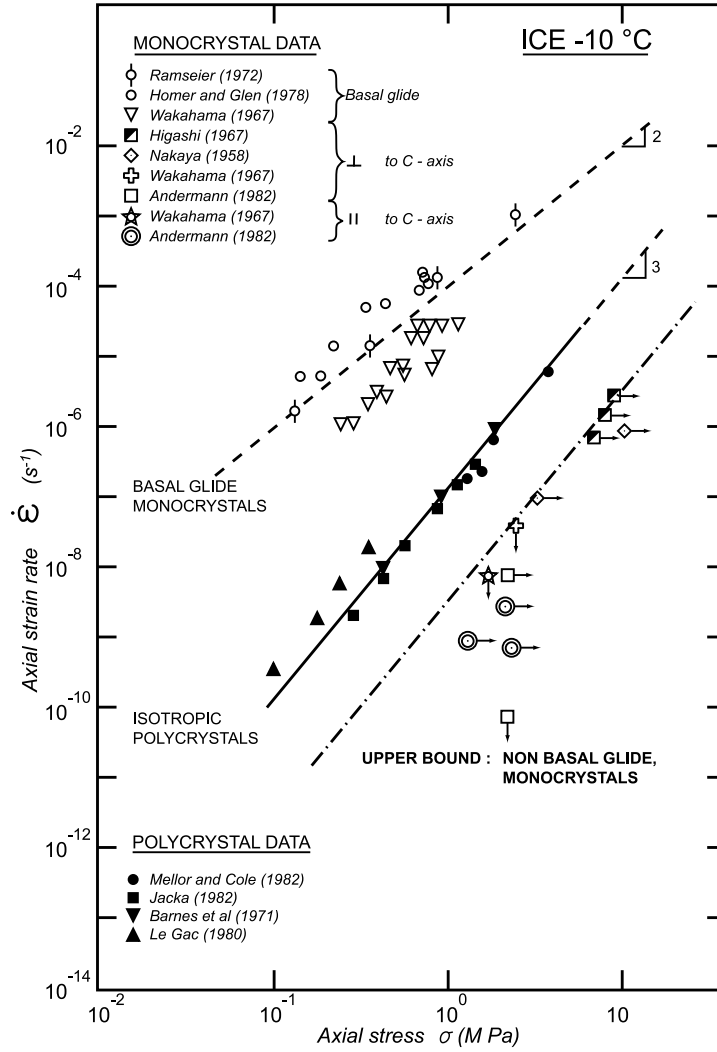
$$(1.1) \quad \dot{\gamma}_b = B_b \tau_b^n$$

où  $\dot{\gamma}_b$  et  $\tau_b$  sont respectivement la vitesse de déformation et la cisssion résolues dans le plan de base du grain. La synthèse des résultats expérimentaux donnée par Duval *et al.* (1983) conduit à un exposant  $n$  proche de 2, et à une énergie d'activation de 63 kJmol<sup>-1</sup>.

Selon Lliboutry (1987), la valeur 2 de l'exposant de la loi puissance pourrait être expliquée par une densité de dislocations proportionnelle à la contrainte. La densité de dislocations mobiles  $\rho$  et la vitesse des dislocations  $v$  étant proportionnelles à la contrainte, d'après la loi d'Orowan :

$$(1.2) \quad D = b\rho v,$$

la vitesse de déformation  $D$  est alors proportionnelle au carré de la contrainte.



**Fig. 1.2 :** Relation entre la vitesse de déformation équivalente et la contrainte équivalente pour la glace isotrope et le monocristal déformé par glissement basal et non basal, d'après Duval et al. (1983).



Notons que les valeurs de l'exposant  $n$  et de l'énergie d'activation pour le polycristal sont différentes de celles du monocristal. Nous présentons plus loin, les particularités mécaniques propres au polycristal de glace.

Enfin, Kamb (1961) a montré que, pour  $n = 1$  ou  $n = 3$ , la direction du glissement dans le plan de base est exactement la même que celle de la cisssion résolue dans le plan de base. Pour des valeurs de  $n$  comprises entre 1 et 3, la déviation entre ces deux directions reste inférieure à  $2^\circ$ . Le plan de base peut donc être considéré comme isotrope.

### 1.3 Comportement de la glace polycristalline

Du fait de la très grande anisotropie viscoplastique du monocristal de glace, le comportement du polycristal de glace dépend fortement de la distribution des axes- $c$  (fabrique) de ses grains constitutifs. Si les axes- $c$  des grains sont répartis de façon aléatoire, alors le comportement du polycristal est isotrope. A l'opposé, si tous les grains ont la même orientation, l'anisotropie du polycristal est très marquée.

Notons que, si l'on néglige la déformation élastique en ne considérant que le comportement viscoplastique, le matériau peut être considéré comme incompressible et par conséquent seule la partie déviatoire du tenseur des contraintes entraîne des déformations.

#### 1.3.1 Comportement de la glace isotrope

Pour des raisons de durée, les essais de laboratoire sur la glace sont réalisés pour des contraintes et des températures relativement élevées ( $\sigma > 0.2 \text{ MPa}$  et  $T \approx -10^\circ\text{C}$  soit  $T/T_f \approx 0.96$ ). Les mécanismes mis en jeux lors de ces essais sont alors spécifiques de ces régimes de contrainte et de température. Dans ces conditions, au cours de la déformation du polycristal de glace isotrope, on distingue trois phases, visibles sur la Figure 1.3.

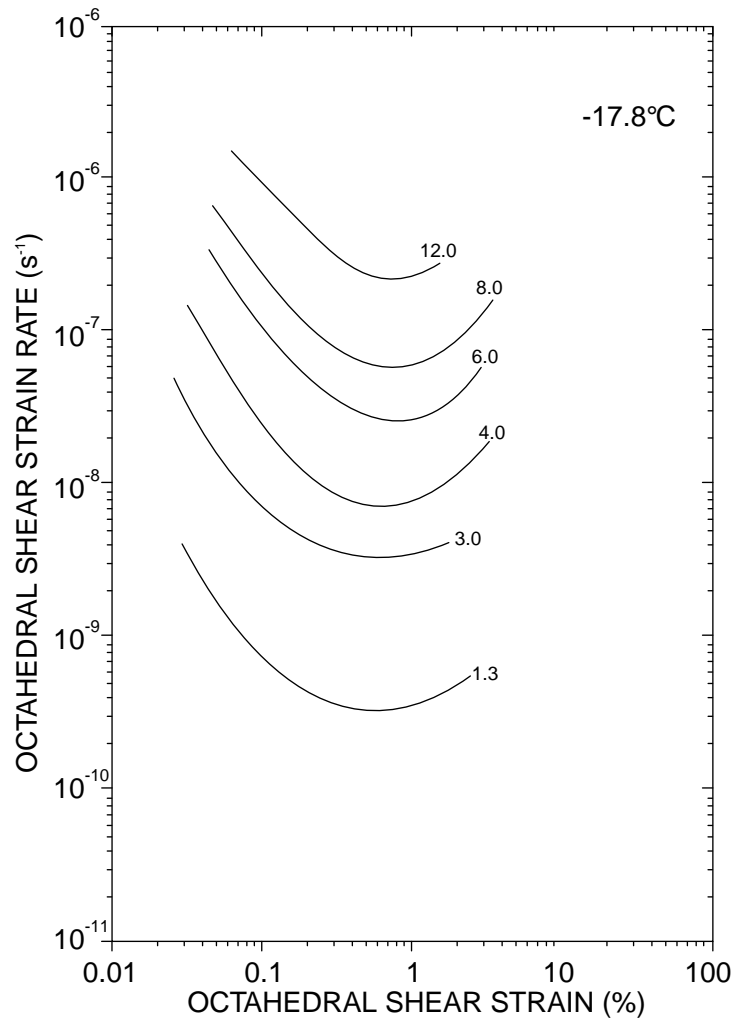
##### 1.3.1.1 Fluage primaire

Du fait de l'anisotropie du cristal de glace, le champ des contraintes dans le polycristal est fortement hétérogène. A l'échelle du grain apparaissent des contraintes internes aux grains dont la valeur peut être nettement supérieure à la contrainte moyenne appliquée. Les dislocations produites par la déformation restent bloquées aux joints de grain, ce qui explique la diminution de la vitesse de déformation (*i.e.* le durcissement du matériau). Cette phase est bien représentée par la loi d'Andrade (*i.e.* déformation proportionnelle à  $t^{1/3}$ ).

##### 1.3.1.2 Fluage secondaire

Contrairement à ce que l'on observe sur la plupart des matériaux viscoplastiques, la phase de fluage secondaire de la glace est très courte. On n'observe pas de période où la vitesse de déformation est constante, et par conséquent, le fluage secondaire est défini au minimum de la vitesse de déformation.

La relation donnant la vitesse de déformation minimale  $\bar{D}$  en fonction de la contrainte déviatoire  $\bar{S}$  est bien décrite par une loi puissance de type Norton-Hoff, couramment



**Fig. 1.3 :** *Courbes de fluage de la glace polycristalline isotrope en compression uniaxiale pour différentes valeurs de la contrainte (en bar), d'après Jacka (1984).*

appelée loi de Glen en Glaciologie :

$$(1.3) \quad \bar{D}_{ij} = \frac{B_n(T)}{2} \tau^{n-1} \bar{S}_{ij},$$

où  $\tau^2 = \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} / 2$  est la cission efficace (deuxième invariant de  $\bar{\mathbf{S}}$ ). La fluidité  $B_n(T)$  (inverse de la viscosité) dépend de la température selon la loi d'Arrhénius :

$$(1.4) \quad B_n(T) = B_n(T_0) e^{\frac{Q}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)},$$

où  $R$  est la constante des gaz parfaits,  $Q$  l'énergie d'activation et  $T, T_0$  sont les températures en Kelvin. D'après Le Gac (1980) et Lliboutry et Duval (1985),  $Q = 78 \text{ kJmol}^{-1}$  pour des températures inférieures à  $-8^\circ\text{C}$ . Pour des températures supérieures, on observe une augmentation de l'énergie d'activation : les valeurs d'énergie d'activation apparente données par la littérature (selon Le Gac (1980),  $Q = 120 \text{ kJmol}^{-1}$  pour  $T > -8^\circ\text{C}$ ) masquent probablement des processus actifs à haute température, tels que la recristallisation due à l'augmentation de la vitesse de migration des joints de grain ou le changement de phase aux joints de grain dans les zones de forte concentration de contrainte.

La valeur de l'exposant  $n$  dans (1.3) dépend du niveau des contraintes appliquées et pour la majorité des essais en laboratoire (contraintes supérieures à 0.2 MPa) la valeur de  $n$  est 3 et  $B_3(-10^\circ\text{C}) \approx 20 \text{ MPa}^{-3} \text{a}^{-1}$  (Duval *et al.*, 1983; Lliboutry et Duval, 1985; Meyssonier et Goubert, 1994).

Cette valeur 3 de l'exposant pour le polycristal est à comparer à la valeur 2 trouvée pour le cristal de glace isolé. La différence d'exposant peut s'expliquer par le rôle des joints de grain qui constituent une barrière au déplacement des dislocations. Selon Duval *et al.* (1983), l'empilement des dislocations dans la zone du joint contraint les dislocations à monter dans d'autres plans. La vitesse des dislocation  $v$  dans la loi d'Orowan (1.2) est alors proportionnelle au carré de la contrainte et par conséquent, la vitesse de déformation est proportionnelle au cube de la contrainte.

Pour des valeurs de contraintes inférieures à 0.1 MPa, très peu d'essais durent assez longtemps pour atteindre la vitesse minimum. Pimienta (1987) trouve une valeur de  $n$  inférieure à 2, qui est confirmée par les données d'inclinométrie dans des trous de forage en Antarctique (Lliboutry et Duval, 1985; Doake et Wolff, 1985). Un comportement linéaire ( $n = 1$ ) caractérise aussi la partie basse du névé pour des densités supérieures à 0.9, et l'étude de la densification dans les forages de Byrd (Antarctique) et Site 2 (Groenland) permet de déduire une valeur  $B_1(-10^\circ\text{C}) = 0.18 \text{ MPa}^{-1} \text{a}^{-1}$  (Pimienta, 1987). Lipenkov *et al.* (1997) appliquent une méthode inverse à partir des données de densification des bulles dans le forage de Vostok (Antarctique) et obtiennent  $n = 1$  et  $B_1(-10^\circ\text{C}) = 0.16 \pm 0.07 \text{ MPa}^{-1} \text{a}^{-1}$ .

Pour les glaces des calottes polaires, ce comportement proche du linéaire est expliqué par l'absorption des dislocations lors de la migration des joints au cours du grossissement des grains (Lliboutry et Duval, 1985). La densité de dislocation  $\rho$  est alors supposée constante (fluage de Harper-Dorn) et par conséquent, d'après (1.2) la vitesse de déformation est proportionnelle à la contrainte.

Notons enfin que la loi de Glen isotrope est la loi la plus utilisée dans les modèles d'écoulement de calottes polaires.

### 1.3.1.3 Fluage tertiaire

Au cours de cette phase, l'augmentation des vitesses de déformation s'explique par les mécanismes de recristallisation dynamique (recristallisation discontinue ou migration-recristallisation, Duval et Castelnau (1995)) qui adoucissent le matériau. Les grains mal orientés pour se déformer sont remplacés par de nouveaux grains (processus de nucléation). Une orientation préférentielle des axes- $c$  à plusieurs maxima apparaît (Duval, 1981; Lliboutry et Duval, 1985), et par conséquent l'état de contrainte dans le matériau devient plus homogène. Cette phase peut aussi être représentée par la loi de Glen, mais pour des valeurs du paramètre  $B_n$  deux à trois fois supérieures à celles données pour le fluage secondaire. Meyssonier (1989) trouve une valeur  $B_3(-10^\circ) = 70 \text{ MPa}^{-3}\text{a}^{-1}$  pour décrire le fluage tertiaire.

Si la vitesse de déformation est trop élevée pour permettre au matériau de dissiper son énergie par déformation plastique, des fissures peuvent apparaître au voisinage des grains les plus gros et les moins bien orientés pour se déformer (Plé, 1998).

### 1.3.2 Textures des glaces polaires

La texture d'un polycristal de glace est la description de la taille, de la forme et de l'agencement des grains qui le composent. La fabrique du polycristal est uniquement la représentation de la répartition des orientations cristallographiques de ses grains (Lliboutry, *Encyclopaedia Universalis*, entrée : glace).

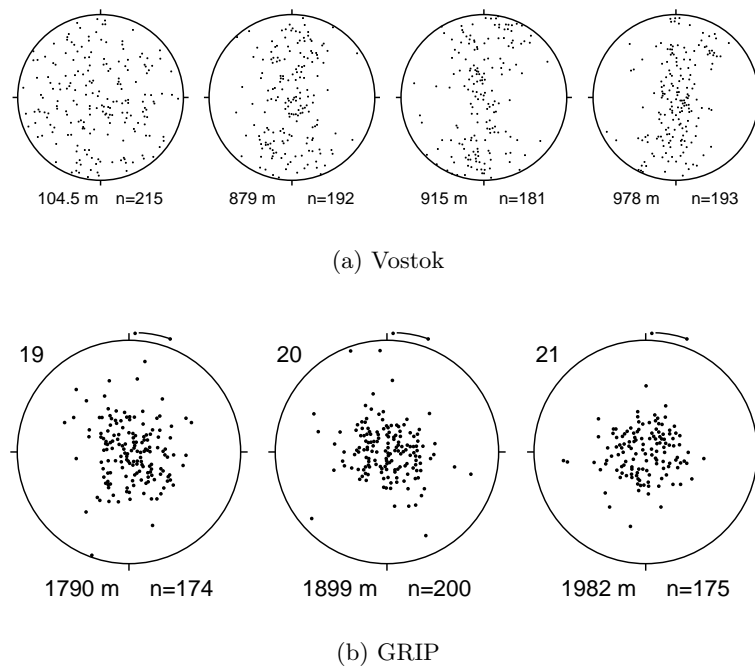
Dans la pratique, la texture d'un morceau de carotte de glace est définie par l'observation de lames minces en lumière polarisée. Pour la carotte de GRIP (Groenland), les lames minces observées comportent, en moyenne, les sections de 100 à 200 grains (Thorsteinsson *et al.*, 1997). L'orientation de l'axe- $c$  de chaque cristal est déterminée en recherchant ses positions d'extinction. La projection de Schmidt permet de représenter de façon conventionnelle la fabrique d'un échantillon sur des figures de pôles. Cette projection conserve les surfaces et permet donc de rendre compte de façon précise du niveau de concentration des fabriques. Chaque grain est visualisé par un point qui est la projection sur le plan de la lame du point d'intersection entre la demi-sphère unité et l'axe- $c$  du grain. La taille du grain peut-être prise en compte en attribuant plusieurs points aux gros grains ou en remplaçant le point par un cercle dont la surface est proportionnelle à la taille du grain qu'il représente.

Des exemples de fabriques observées dans les glaces des calottes polaires sont présentés sur la Figure 1.4. En surface, l'orientation des cristaux est aléatoire et le polycristal est isotrope. Lorsque la profondeur augmente, les fabriques sont plus concentrées et, suivant le site de forage, les axes- $c$  sont concentrés autour de la direction verticale<sup>2</sup> ou bien forment une couronne homogène dans un plan vertical<sup>3</sup>, dont l'orientation par rapport au plan de l'écoulement (parallèle ou perpendiculaire) demeure inconnue à ce jour (Duval, communication personnelle, 1998).

Ces observations ne sont sans doute pas représentatives de l'ensemble des formes

<sup>2</sup>A Camp Century, Dye 3 et GRIP au Groenland, et Byrd station et Law Dome en Antarctique : Russell-Head et Budd (1979); Herron et Langway (1982); Thorsteinsson *et al.* (1997).

<sup>3</sup>A Vostok et Mizuho en Antarctique : Fujita *et al.* (1987); Lipenkov *et al.* (1989).



**Fig. 1.4 :** Exemples de fabriques observées dans les forages de (a) Vostok (Antarctique) aux profondeurs de 104.5m, 879m, 915m et 978m (Lipenkov et al., 1989) et (b) GRIP (Groenland) aux profondeurs de 1790m, 1899m et 1982m (Thorsteinsson et al., 1997). La projection est faite dans le plan horizontal in-situ.

de fabriques, puisque il est difficile d'imaginer le passage d'une fabrique axisymétrique d'axe vertical à une fabrique axisymétrique d'axe horizontal sans une transition pendant laquelle la fabrique n'est plus axisymétrique.

### 1.3.3 Comportement de la glace polycristalline anisotrope

Les courbes de fluage de la glace polycristalline anisotrope présentent les trois mêmes phases que celles de la glace isotrope. Nous donnons ici des résultats d'essais mécaniques réalisés sur des glaces polaires dont les fabriques sont très marquées. La réponse du polycristal de glace anisotrope est comparée à celle de la glace isotrope pour le fluage secondaire.

Des essais réalisés par Duval et Le Gac (1982) sur des glaces de Dome-C ont montré que, pour un polycristal dont tous les axes- $c$  sont alignés perpendiculairement à la direction de cisaillement, la fluidité en cisaillement  $B_{//}$  est dix fois supérieure à celle de la glace isotrope à la même température. En compression dans la direction des axes- $c$ , la fluidité est quatre fois plus faible que celle de la glace isotrope.

Ces résultats sont à comparer à la valeur  $10^3$  donné par Duval *et al.* (1983) pour le rapport entre la fluidité dans le plan de base d'un monocristal isolé et la fluidité de la glace isotrope. La différence de deux ordres de grandeur entre le monocristal isolé et le polycristal dont tous les cristaux ont la même orientation, s'explique par le rôle des joints de grains qui dans le polycristal constituent des obstacles au mouvement des dislocations. Notons qu'aucun des modèles de comportement présentés dans le paragraphe suivant n'est capable de reproduire cette différence. En effet, pour un polycristal dont tous les axes- $c$  auraient la même orientation, tous ces modèles donnent un comportement limite correspondant à celui du grain isolé. Ceci vient du fait que le rôle des joints de grain n'est pas pris en compte dans ces modèles.

Pimienta *et al.* (1987) ont réalisé des essais sur les glaces de Vostok dont la fabrique forme une couronne homogène (*cf.* Figure 1.4). Contrairement aux glaces à un seul maximum d'orientation des axes- $c$ , les glaces de Vostok ne possèdent pas de direction dans laquelle la fluidité est plus importante que celle de la glace isotrope. Seule la direction perpendiculaire au plan de la couronne présente une grande différence de comportement par rapport à la glace isotrope, avec une fluidité en compression seize fois plus faible que celle de la glace isotrope à la même température.

Ces essais réalisés sur différentes glaces montrent clairement le lien entre la fabrique de l'échantillon et son anisotropie mécanique.

### 1.3.4 Localisation des différents processus au sein des calottes polaires

Les mécanismes mis en jeu pour déformer les cristaux de glace qui composent les calottes polaires dépendent de nombreux paramètres, tels que l'histoire des déformations, la fabrique, les contraintes, la température, la teneur en impuretés.

La variation spatiale de ces conditions dans les calottes polaires entraîne que, suivant l'endroit observé, les mécanismes mis en jeu ne sont pas les mêmes, et que par conséquent, la loi de comportement peut prendre différentes formes (valeur de  $n$ , valeurs des coefficients rhéologiques, ...). Pimienta *et al.* (1987) et Alley (1992) proposent de

distinguer trois zones en fonction de la profondeur :

- Dans les premières centaines de mètres sous la surface, une zone de faibles contraintes où les grains grossissent pour diminuer l'énergie de surface. Une valeur de  $n$  proche de 1, expliquée par l'absorption des dislocations liée à la migration des joints de grains (Lliboutry et Duval, 1985), semble adaptée pour décrire le comportement dans cette zone (Doake et Wolff, 1985; Pimienta *et al.*, 1987).
- En progressant en profondeur, les contraintes augmentent et le fluage dislocation prend le pas sur le grossissement des grains. La taille des grains peut être stable (par exemple à GRIP, Thorsteinsson *et al.* (1997)) et l'arrêt de la croissance des grains s'explique alors par la polygonisation des grains. Un exposant inférieur à 3 est proposé par la plupart des auteurs pour décrire le comportement dans cette zone (Doake et Wolff, 1985; Lliboutry et Duval, 1985). La rotation des grains par glissement intracristallin entraîne la formation de fabriques qui tendent à se concentrer vers un seul maximum.
- Une troisième zone, proche du lit rocheux, où la glace peut subir de fortes variations de contraintes lorsque le lit est irrégulier et où la température est généralement élevée ( $T > -10^{\circ}\text{C}$ ). Ces conditions particulières induisent une recristallisation discontinue (ou migration-recristallisation), au cours de laquelle de nouveaux grains mieux orientés pour se déformer sont créés, qui donne naissance à des fabriques à plusieurs maximums. Les fabriques observées à ces profondeurs peuvent présenter de très brusques changements de forme, comme par exemple les fabriques de GRIP (Groenland) en dessous de 2800m (Thorsteinsson *et al.*, 1997). L'observation de ces fabriques à plusieurs maximums n'est cependant pas systématique à ces profondeurs (Alley, 1992). Dans cette zone profonde, on suppose que la valeur de l'exposant est comparable à celle déduite des essais en laboratoire, soit  $n = 3$ , mais une valeur inférieure à 3 n'est pas impossible.

## 1.4 Modélisation des phénomènes observés

Dans cette partie, nous discutons les différents modèles de la littérature, des modèles de comportement du grain aux modèles d'écoulement des calottes polaires. Les spécificités des différents modèles de comportement et d'évolution de la fabrique de la glace polycristalline sont détaillées.

### 1.4.1 Modèles de comportement du grain

Essentiellement, trois modèles de grain sont proposés dans la littérature :

#### (1) Déformation par glissement basal

La majorité des auteurs (Lliboutry, 1993; Van der Veen et Whillans, 1994; Azuma et Goto-Azuma, 1996; Svendsen et Hutter, 1996; Gödert et Hutter, 1998) postulent que le grain se déforme uniquement par glissement basal. Seule la cission résolue dans le plan

de base  $\tau_b$  entraîne une vitesse de déformation  $\dot{\gamma}_b$  du cristal par cisaillement parallèlement au plan de base, soit d'après Lliboutry (1993) :

$$(1.5) \quad \dot{\gamma}_b = \psi_b \tau_b + B_b \tau_b^3,$$

où  $\psi_b$  et  $B_b$  sont les fluidités en cisaillement parallèlement au plan de base pour les cas linéaire et non-linéaire ( $n = 3$ ), respectivement.

## (2) Modèle à systèmes de glissement

Castelnau *et al.* (1996b) proposent un modèle de comportement du grain pouvant se déformer par glissement dans les plans basal, pyramidal et prismatique. Pour chaque système de glissement, la vitesse de cisaillement est contrôlée par la dureté du système, le plan de base étant celui où le glissement est le plus facile.

## (3) Comportement orthotrope de révolution

Meyssonier et Philip (1996) adoptent une loi de matériau incompressible linéaire orthotrope de révolution pour décrire le comportement du grain. L'anisotropie du grain est contrôlée par deux paramètres qui permettent de passer d'un grain se déformant uniquement par glissement basal (équivalent au modèle (1)) à un grain isotrope.

Ce modèle est présenté au chapitre suivant, ainsi que son extension au cas non-linéaire. De plus, nous comparons les modèles (2) et (3) dans le cas linéaire et montrons qu'ils sont équivalents (*cf.* 2.3).

### 1.4.2 Modèles de description de la fabrique : grains discrets ou ODF

#### 1.4.2.1 Grains discrets

Pour décrire la fabrique d'un polycristal de glace, l'approche classique consiste à se donner un nombre fini de grains (voir par exemple Molinari *et al.*, 1987; Chastel *et al.*, 1993; Van der Veen et Whillans, 1994; Azuma, 1994; Castelnau *et al.*, 1996b). Cette méthode permet de définir très précisément l'orientation de chaque grain (axe- $c$  et axe- $a$  pour la glace par exemple) en utilisant les trois angles d'Euler, mais aussi éventuellement sa taille ou des variables internes diverses (Par exemple une densité de dislocation). C'est la méthode la plus naturelle pour décrire la fabrique d'un échantillon réel dont on veut reproduire le comportement avec un modèle. Son inconvénient majeur est le grand nombre de données à stocker puisque un minimum de 200 grains semble nécessaire pour décrire convenablement le polycristal, notamment lorsqu'il est isotrope (Elvin, 1996). Par conséquent, son utilisation dans un modèle d'écoulement de calotte polaire contenant environ  $10^5$  nœuds (Greve et Hutter, 1995; Fabre *et al.*, 1997) semble conduire à un volume de données trop important.

#### 1.4.2.2 Fonction de distribution des orientations (ODF)

Une approche plus mathématique, consiste à décrire la fabrique d'un point de vue statistique par une fonction de distribution des orientations cristallines. Cette fonction, positive, continue et infiniment dérivable (Moussy et Franciosi, 1990, page 151), donne



la fraction volumique  $dV(g)$  des cristaux possédant l'orientation  $g$  à  $dg$  près dans le volume  $V_0$  de l'échantillon, soit :

$$(1.6) \quad \frac{dV(g)}{V_0} = K \cdot f(g) dg,$$

où la condition de normalisation

$$(1.7) \quad \frac{1}{V_0} \int_V dV(g) = K \int_g f(g) dg = 1,$$

et la condition  $f(g) = 1$  pour un échantillon isotrope sans texture (*i.e.* pour une répartition aléatoire de tous les cristaux), entraînent  $K = 1/8\pi^2$ .

Lorsque le cristal peut être repéré uniquement par une seule orientation, comme c'est le cas pour la glace avec les modèles 1 et 3 présentés au paragraphe 1.4.1,  $f$  est une fonction de seulement deux angles (en coordonnées sphériques par exemple). La fonction de distribution des orientations  $f(\theta, \varphi)$  (Orientation Distribution Function ou ODF, voir Van der Giessen et Van Houtte, 1992; Meyssonier et Philip, 1996) donne alors la fraction volumique des cristaux dont l'orientation est  $(\theta, \varphi)$ .

Par définition, l'ODF vérifie l'équation de conservation du nombre total de grains, qui s'écrit :

$$(1.8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 1.$$

L'avantage de l'ODF est de pouvoir être déterminée sous forme d'une fonction continue. Il est aussi possible de mener des calculs analytiques et ainsi d'obtenir des solutions analytiques de l'ODF pour différentes conditions de chargement (Van der Giessen et Van Houtte, 1992; Svendsen et Hutter, 1996).

#### 1.4.2.3 Moyenne sur les cristaux

Une quantité macroscopique  $\bar{A}$  (composante des tenseurs des vitesses de déformation, des contraintes, ...) est définie comme étant la moyenne de cette quantité  $A$  sur tous les grains du polycristal. En fonction de la méthode choisie pour représenter la fabrique, nous écrirons :

$$(1.9) \quad \bar{A} = \langle A_g \rangle = \frac{1}{N_g} \sum_{g=1}^{N_g} A_g,$$

si la fabrique est décrite par  $N_g$  grains discrets,

$$(1.10) \quad \bar{A} = \langle A(\theta, \varphi) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} A(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

lorsque la fabrique est décrite à l'aide de l'ODF  $f(\theta, \varphi)$ .

### 1.4.3 Modèles de comportement du polycristal anisotrope

Nous présentons dans ce paragraphe trois types d'approches pour décrire le comportement mécanique d'un polycristal de glace.

#### 1.4.3.1 Modèles phénoménologiques

Une première approche consiste à adopter une forme de loi macroscopique (Boehler, 1978) et à déterminer la valeur des coefficients pour un échantillon de glace anisotrope testée en laboratoire (Le Gac, 1980; Anderman, 1982; Pimienta *et al.*, 1987). Cette approche ne permet pas, *a priori*, de prédire le comportement d'un échantillon à partir de la seule observation de sa fabrique. Néanmoins, ces résultats sont très utiles pour valider les modèles d'homogénéisation.

Morland et Staroszczyk (1998) proposent un modèle phénoménologique pour le comportement et l'évolution de la texture construit à partir des théorèmes de représentation des fonctions tensorielles objectives (Boehler, 1978). L'anisotropie est restreinte au cas particulier de l'orthotropie en supposant qu'elle est conservée au cours de la déformation du matériau. La contrainte déviatoire est exprimée comme fonction de la vitesse de déformation actuelle, de la déformation et de trois tenseurs de structure. Dans son expression la plus simple, le modèle dépend d'une seule fonction de la déformation pour décrire l'évolution de l'anisotropie. Cette fonction est calée sur des résultats d'essais mécaniques (Staroszczyk et Morland, 2000) ou à l'aide des modèles plus physiques présentés ci-dessous (Staroszczyk et Gagliardini, 1999). L'intérêt majeur de ce modèle réside dans sa formulation uniquement macroscopique, qui permet d'envisager son incorporation dans un modèle d'écoulement de calotte polaire sans trop de difficulté.

#### 1.4.3.2 Discrétisation spatiale du polycristal

Le polycristal est discrétisé en un nombre fini de cristaux, qui eux mêmes peuvent être divisés en un nombre fini d'éléments. La méthode des éléments finis est généralement la méthode employée pour résoudre les équations de l'équilibre du polycristal (Harren *et al.*, 1988; Teodosiu *et al.*, 1993). Cette méthode est très précise dans la description des champs de contraintes et de déformations à l'intérieur du polycristal. Elle permet notamment de tenir compte de l'arrangement des grains observé sur une lame mince. Par contre, les applications sont généralement 2D et nécessitent un investissement en temps de calcul et en données très important. Les résultats obtenus avec la méthode des éléments finis sont très utiles pour caler d'autres modèles (Molinari et Tóth, 1994).

#### 1.4.3.3 Méthodes micro-macro d'homogénéisation

Dans les méthodes micro-macro, le comportement du polycristal, pour une fabrique observée donnée, est obtenu par des méthodes d'homogénéisation à partir de celui du grain.

L'homogénéisation consiste à déduire le comportement d'un assemblage d'éléments qui interagissent entre eux, à partir de la connaissance du comportement de l'élément isolé et des lois d'interaction. Dans le cas de la glace polycristalline, le comportement mécanique d'un assemblage de grains est déterminé à partir de celui du grain isolé.

Les équations à vérifier sont l'équation de l'équilibre dans chaque grain et l'équation de compatibilité des déformations<sup>4</sup> entre les grains.

Il n'est pas possible de vérifier *exactement* ces deux équations pour l'ensemble des grains. De cette constatation découle les hypothèses des différents modèles :

**Modèle type "Taylor"** Le modèle de Taylor suppose que les déformations sont homogènes dans tous les grains et égales à la déformation macroscopique du polycristal. Cette hypothèse implique que la continuité des déformations est respectée.

**Modèle à contraintes homogènes ou modèle statique** Le modèle statique repose sur l'hypothèse de contraintes uniformes dans le polycristal. L'équation de l'équilibre quasi-statique est donc implicitement vérifiée. Notons que ce modèle est différent du modèle de Sachs (1928) qui lui ne vérifie ni l'équation de l'équilibre ni l'équation de la continuité (voir par exemple Kocks *et al.*, 1998, page 468).

**Modèle de type Auto-cohérent** Les modèles de type auto-cohérent vérifient "au mieux" les deux équations et donnent un comportement de polycristal compris entre les comportements du modèle de Taylor et du modèle à contraintes homogènes.

Nous présentons ici les particularités des différents modèles d'homogénéisation de la littérature utilisés pour décrire le comportement de la glace polycristalline anisotrope. Notons que la plupart des auteurs proposent aussi un modèle d'évolution de la fabrique (*cf.* §1.4.4).

Le modèle de Taylor semble mal adapté pour décrire le comportement de la glace. Il nécessite un minimum de cinq systèmes de glissement indépendants et donc un modèle de comportement du grain qui ne tienne pas compte uniquement du glissement basal (deux systèmes indépendants) (Castelnau *et al.*, 1996b).

Lliboutry (1993) présente une méthode d'homogénéisation basée sur l'hypothèse des contraintes homogènes, dans le cas où la fabrique présente une symétrie de révolution. Le comportement macroscopique est seulement fonction de la fluidité dans le plan de base du cristal et d'un paramètre de description de la fabrique  $\theta_{1/2}$  (*cf.* §3.5.3). L'intérêt de cette homogénéisation est de déterminer la forme de la loi macroscopique. Ainsi, lorsque le comportement est linéaire ( $n = 1$ ), la loi macroscopique dépend de trois paramètres indépendants, et de cinq<sup>5</sup> lorsque le comportement est non-linéaire ( $n = 3$ ). Dans le **Chapitre 4**, nous étendons ce modèle au matériau orthotrope.

Le modèle linéaire de Svendsen et Hutter (1996) est lui aussi basé sur l'hypothèse des contraintes homogènes, et le comportement du polycristal de glace est décrit à l'aide d'un tenseur de structure, déduit de l'homogénéisation de tous les tenseurs de structure des différents grains. Le grain est supposé orthotrope de révolution et il dépend de trois coefficients rhéologiques, ainsi que le comportement du polycristal déduit de l'homogénéisation. Gödert et Hutter (1998) étendent le modèle au cas non-linéaire mais en adoptant le modèle simplifié de grain se déformant uniquement par glissement basal.

<sup>4</sup>Deux grains ne doivent pas se chevaucher ou se décoller.

<sup>5</sup>La loi est exprimée en fonction de sept paramètres, mais il existe deux relations entre ces sept paramètres, ce qui réduit le nombre de paramètres indépendants à cinq.

Le modèle d’Azuma (Azuma, 1994, 1995) tient compte du voisinage de chaque grain dans le cas d’un état de contrainte macroscopique uniaxial. La contrainte principale  $\sigma_i$  dans un grain est le produit de la contrainte principale macroscopique  $\bar{\sigma}_i$  par le rapport du facteur de Schmid du grain à la moyenne des facteurs de Schmid des grains voisins<sup>6</sup>. Ceci suppose que les repères des contraintes principales du grain et du polycristal sont confondus. Pour une orientation de grain donnée, la contrainte dans ce grain est d’autant plus grande que les grains autour sont bien orientés pour se déformer. Ce modèle est étendu à un état de contrainte macroscopique quelconque, en remplaçant le facteur de Schmid par le tenseur de Schmid (Azuma et Goto-Azuma, 1996).

Les modèles de Castelnau et Duval (1994) et Van der Veen et Whillans (1994), basés sur l’hypothèse de contraintes homogènes et pour un comportement non-linéaire du grain, utilisent un nombre fini de grains pour définir la fabrique. Ceci permet de décrire tout type d’anisotropie, et donc d’appliquer une sollicitation quelconque.

Castelnau (1996), et Meyssonier et Philip (1996) utilisent l’approche auto-cohérente, ce qui nécessite l’adoption d’un modèle de comportement du grain qui tient compte de plus de deux systèmes de glissement. Castelnau (1996) a appliqué à la glace polycristalline la version ”1 site” anisotrope (Lebensohn et Tomé, 1993) du modèle auto-cohérent viscoplastique développé par Molinari *et al.* (1987). Castelnau (1996) modélise le comportement du grain en introduisant du glissement dans les plans prismatique et pyramidal. L’analyse d’essais mécaniques montre que pour reproduire le comportement observé, il faut une contrainte de référence dans ces plans au moins 70 fois plus importantes que dans le plan basal. Les modèles statique et de Taylor sont comparés au modèle auto-cohérent pour différentes sollicitations (Castelnau *et al.*, 1996b). La différence de comportement entre les modèles statique et auto-cohérent est moins importante que celle entre le modèle de Taylor et le modèle auto-cohérent. Notons que la fabrique est décrite par un nombre fini de grains, et que l’orientation d’un grain, repéré par son axe- $c$  et un axe- $a$ , nécessite trois angles. Meyssonier et Philip (1996) utilisent un modèle de comportement linéaire orthotrope de révolution pour décrire le grain. Le polycristal est supposé, lui aussi, orthotrope de révolution et la fabrique est décrite par une ODF, ce qui permet un développement analytique des équations.

#### 1.4.4 Modèles d’évolution de la fabrique

La plupart des auteurs qui proposent un modèle de comportement micro-macro présentent aussi un modèle d’évolution de la fabrique. En général, l’hypothèse principale du modèle de comportement (contraintes homogènes, déformations homogènes ou auto-cohérence) reste valable pour décrire l’évolution de la fabrique.

En faisant l’hypothèse de contraintes homogènes dans le polycristal, Van der Veen et Whillans (1994) et Castelnau et Duval (1994) décrivent le développement de fabriques pour des chargements imposés de compression, traction, cisaillement pur et cisaillement simple. Le modèle de Van der Veen et Whillans (1994) introduit un critère de recristallisation simple : si la différence entre les déformations cumulées d’un grain et du polycristal dépasse une certaine valeur alors le grain est remplacé par un nouveau grain dont l’orientation est telle que la cission dans son plan de base est maximum. Castelnau

<sup>6</sup>Le facteur de Schmid est défini en fonction de l’angle  $\chi$  entre la direction de compression et l’axe- $c$ , par  $S_g = \cos \chi \sin \chi$ .

(1996) souligne l'*incohérence* du modèle à contraintes homogènes pour décrire l'évolution de la fabrique, puisque il est nécessaire de faire une hypothèse sur la relation entre les vitesses de rotation des grains et la vitesse de rotation du polycristal par rapport au repère de référence. Dans la plupart des modèles à contraintes homogènes, l'hypothèse consiste à postuler l'égalité de ces deux vitesses de rotation, alors que le champ des vitesses n'est pas continu. Cependant, comme le montre Castelnau (1996), les résultats obtenus avec ce modèle restent très réalistes et assez proches de ceux obtenus avec le modèle auto-cohérent.

Contrairement au modèle à contraintes homogènes, pour le modèle auto-cohérent les vitesses de rotation d'un grain sont fonction de son interaction avec le Milieu Homogène Equivalent, et il n'est donc pas nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire. Castelnau (1996) compare l'évolution des fabriques données par les modèles à contraintes homogènes, de Taylor et auto-cohérent pour différents cas de chargement. Si le modèle de Taylor donne des fabriques qui sont radicalement différentes de celles obtenues avec le modèle auto-cohérent, il est difficile par une simple observation des fabriques, de pouvoir différencier les modèles auto-cohérent et à contraintes homogènes.

Van der Giessen et Van Houtte (1992), puis Svendsen et Hutter (1996) développent des calculs analytiques pour l'ODF en faisant l'hypothèse de vitesses de déformation constantes et homogènes dans le polycristal et pour un monocristal de glace bidimensionnel. Nous présentons dans le **Chapitre 3**, des développements analytiques analogues à ceux présentés par ces auteurs, mais pour un comportement de grain tridimensionnel.

Meyssonier et Philip (1996) proposent une ODF paramétrée déduite des résultats de Van der Giessen et Van Houtte (1992). Cette fonction dépend de trois paramètres et elle décrit de façon satisfaisante les fabriques axisymétriques de compression et de traction.

### 1.4.5 Modèles de calottes polaires

L'objet de ce paragraphe n'est pas de présenter *tous* les modèles de calottes polaires existants, mais de donner les principales hypothèses qui sont faites dans la plupart de ces modèles. Un inventaire détaillé des modèles de calottes polaires est proposé par Fabre (1997).

Les calottes polaires s'écoulent sous l'effet de la gravité du centre vers les bords. L'écoulement est alimenté par un apport en nouveau matériau sous forme de neige, qui se densifie dans la première centaine de mètres sous la surface pour donner de la glace. Lorsque la température au contact du lit rocheux est proche du point de fusion, à cause de l'apport de chaleur dûe au flux géothermique, il y a glissement de la glace sur le lit rocheux.

L'écoulement de la glace vérifie l'équation de la conservation de la masse, les équations de l'équilibre quasi-statique et l'équation de la chaleur, avec comme conditions aux limites des conditions appliquées sur la surface libre (accumulation, ablation, température, ...), au contact du lit rocheux (géométrie, flux géothermique, glissement ou non-glissement, réponse isostatique,...) et sur les bords (température, vèlage d'icebergs, niveau des mers, ...). Pour valider ces modèles, très peu de données<sup>7</sup> sont disponibles au regard des étendues explorables.

<sup>7</sup>Mesures de surface et dans les forages par des missions sur le terrain, et mesures satellitaires.

Fabre (1997) distingue les modèles à *géométrie imposée* et les modèles *d'évolution*. Les modèles de la première catégorie déterminent l'état stationnaire d'une calotte pour une géométrie du lit rocheux, des conditions d'accumulation et de température données. Cette résolution peut passer par la recherche de la surface libre qui vérifie les conditions de stationnarité de l'écoulement. Cette catégorie de modèles est essentiellement utilisée pour l'interprétation des forages et notamment pour fournir une datation des carottes de glace. Les modèles de la seconde catégorie calculent l'évolution de la géométrie de la calotte polaire lorsque les conditions climatiques imposées changent ("forçage climatique"). Ils permettent, notamment, d'étudier globalement les calottes actuelles mais aussi de reconstruire les calottes passées, ou encore de prévoir l'extension des calottes dans le futur suivant différents scénarios climatiques (Hutter, 1983; Ritz, 1992).

La plupart des modèles de calottes polaires reposent sur l'approximation de la couche mince (Fowler et Larson, 1980; Hutter, 1981; Morland, 1984; Hutter *et al.*, 1986) qui découle du faible rapport d'aspect de la calotte  $\epsilon = d/L$ , où  $d$  et  $L$  sont respectivement les hauteur et longueur caractéristiques de la calotte. La valeur du rapport d'aspect étant de l'ordre de  $10^{-3}$ , un développement en série de  $\epsilon$  permet d'aboutir à la résolution d'un système d'équations simplifiées pour chaque ordre du développement.

Comme nous l'avons vu précédemment, le matériau qui compose les calottes polaires n'est pas homogène et son comportement dépend d'un très grand nombre de paramètres. Tous les modèles existant dans la littérature sont donc bâtis sur des hypothèses qui tendent à diminuer ce nombre de paramètres et ceci en fonction des objectifs visés.

L'anisotropie de la glace est un de ces paramètres qui, pour l'instant, n'a pu être incorporé de façon satisfaisante. Pour tenir compte de l'anisotropie, la méthode la plus répandue consiste à multiplier la viscosité (isotrope) par un coefficient ("enhancement factor") de façon à reproduire le cisaillement plus aisée des glaces profondes à fabrique verticale. Récemment, Mangeney (1996); Mangeney *et al.* (1996, 1997) ont incorporé dans un modèle d'écoulement une loi orthotrope de révolution pour la glace polycristalline, en considérant la fabrique comme une donnée fixe. Les résultats obtenus avec ce modèle montrent clairement que l'effet de l'anisotropie sur l'écoulement n'est pas négligeable et que l'utilisation d'un *enhancement factor* n'est pas satisfaisant. Comme la température, l'anisotropie, et donc la fabrique de la glace en un point, devraient être des inconnues à déterminer dans la résolution globale de l'écoulement. Contrairement à la température, tenir compte de la fabrique nécessite un nombre de paramètres important et la résolution d'équations qui restent à déterminer. De plus, même si un début de preuve a été donné par Mangeney (1996), il reste à montrer que la fabrique fait réellement partie des paramètres pertinents à prendre en compte pour la modélisation des calottes polaires.

#### 1.4.6 Modèles multi-échelles

Depuis quelques années, des applications ont été conduites en incorporant un modèle micro-macro de comportement (et d'évolution de la texture) dans un code à grande échelle (Mathur *et al.*, 1990; Kocks *et al.*, 1991; Chastel *et al.*, 1993). Classiquement la loi de comportement du polycristal est implémentée dans un code aux éléments finis et la fabrique du polycristal est décrite par un nombre fini de grains discrets. Lorsque la formulation est Eulérienne et l'écoulement stationnaire, les trajectoires sont confondues

avec les lignes de courant. L'évolution de la fabrique est donc déterminée le long de ces lignes de courant en démarrant des frontières où la fabrique est connue (Dawson et Beaudoin, 1998).

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu des différents domaines auxquels nous allons faire référence dans les chapitres suivants : du cristal de glace aux calottes polaires.

Nous avons vu que les essais mécaniques réalisés sur des glaces polaires présentant une forte texture mettent en évidence l'anisotropie du comportement mécanique. Les différents mécanismes de la déformation du polycristal de glace ont été présentés ainsi que leur localisation dans les calottes polaires.

Nous avons noté que dans les deux tiers supérieurs l'exposant  $n$  de la loi puissance est inférieur à 3 et que la rotation et la polygonisation des cristaux sont les mécanismes principaux de l'évolution de la fabrique.

Notre objectif final étant d'incorporer une loi de comportement de la glace polycristalline dans un modèle de calotte polaire, l'étude des différents modèles de glace polycristalline amènent ces deux remarques :

- la description par un nombre fini de grains ne semble pas adaptée à notre problème et l'utilisation d'une ODF doit permettre de modéliser la fabrique par une fonction continue dépendant de peu de paramètres.
- le traitement numérique du modèle auto-cohérent semble conduire à des temps de calcul trop importants pour être raisonnablement intégré, à ce jour, dans un modèle de calotte polaire. Par ailleurs, le modèle à contraintes homogènes appliqué à la glace donne des résultats qui restent assez proches de ceux obtenus avec le modèle auto-cohérent, en présentant l'avantage d'un formalisme beaucoup plus simple.





## Chapitre 2

# Modèle de comportement du cristal de glace.

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous formulons la loi de comportement viscoplastique du cristal de glace pour les cas linéaire et non-linéaire. Nous utilisons une formulation objective basée sur les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles (Boehler, 1975).

Certains résultats intermédiaires sont donnés dans l'**Annexe A**. Le système de notation adopté est défini en tête du mémoire (page xv).

### 2.2 Modèle viscoplastique adopté

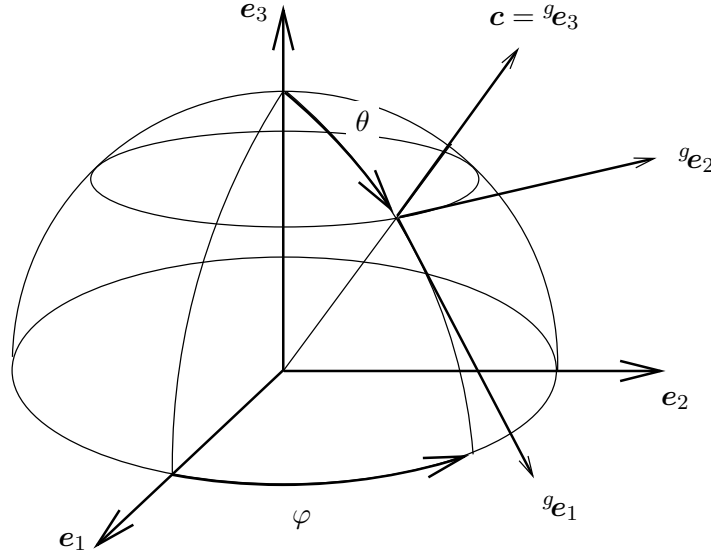
Comme Meyssonier et Philip (1996) puis Gagliardini et Meyssonier (1999), nous faisons l'hypothèse que le monocristal de glace isolé se comporte comme un matériau incompressible orthotrope de révolution autour de l'axe  $\mathbf{c}$ , confondu avec  ${}^g\mathbf{e}_3$  dans le repère du grain  $\{^g\mathbf{R}\}$ . Les vecteurs  ${}^g\mathbf{e}_1$  et  ${}^g\mathbf{e}_2$  définissent le plan isotrope du cristal. Ainsi, la position d'un grain dans le repère de référence  $\{\mathbf{R}\}$  est donnée en fonction de seulement deux angles  $\theta$  et  $\varphi$ , définis sur la Figure 2.1. La matrice de rotation  $\mathbf{R}$  permettant de passer du repère du grain  $\{^g\mathbf{R}\}$  au repère de référence  $\{\mathbf{R}\}$  est donnée par :

$$(2.1) \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

#### 2.2.1 Comportement linéaire

Dans un premier temps, nous supposons que la vitesse de déformation  $\mathbf{D}$  est fonction linéaire du déviateur des contraintes  $\mathbf{S}$ . A partir de la formulation la plus générale de la loi de comportement du matériau linéaire orthotrope de révolution (A.1), donnée en **Annexe A**, l'application de la condition d'incompressibilité conduit à la formulation suivante pour décrire le comportement du cristal de glace :

$$(2.2) \quad \mathbf{D} = \delta_1 \mathbf{S} + \delta_2 \mathbf{M}_3^D + \delta_3 (\mathbf{S} \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \mathbf{S})^D,$$



**Fig. 2.1 :** Le repère du grain  $\{^gR\}$  est positionné par rapport au repère de référence  $\{R\}$  par sa co-latitude  $\theta$  et sa longitude  $\varphi$ .

où  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} = {}^g\mathbf{e}_3 \otimes {}^g\mathbf{e}_3$  est le tenseur de structure décrivant la symétrie de révolution du cristal autour de  ${}^g\mathbf{e}_3$  et  $()^D$  désigne la partie déviatoire d'un tenseur. Dans le cas linéaire, les coefficients  $\delta_1$  et  $\delta_3$  sont des constantes et  $\delta_2$  est uniquement fonction de  $\text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S})$  (Boehler, 1978).

Plutôt que d'utiliser les paramètres  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\delta_3$ , nous allons introduire trois autres paramètres,  $\psi$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  qui définissent de façon plus qualitative le comportement du grain :

$\psi$  est la fluidité en cisaillement parallèlement au plan de base du monocristal, définie par :

$$(2.3) \quad {}^gD_{23} = \frac{\psi}{2} {}^gS_{23} \quad \text{et} \quad {}^gD_{31} = \frac{\psi}{2} {}^gS_{31},$$

$\beta$  est le rapport entre la fluidité en cisaillement dans le plan de base et la fluidité en cisaillement parallèlement au plan de base, défini par :

$$(2.4) \quad {}^gD_{12} = \beta \frac{\psi}{2} {}^gS_{12},$$

$\gamma$  est le rapport entre les fluidités en compression-traction dans une direction contenue dans le plan de base et dans la direction de l'axe- $c$ .

$D$  étant la valeur de la vitesse de déformation  ${}^gD_{33}$  obtenue pour une compression-traction uniaxiale  ${}^g\sigma_{33} = \sigma$ , la vitesse de déformation  ${}^gD_{rr}$ , pour une compression-traction  ${}^g\sigma_{rr} = \sigma$  selon la direction  ${}^g\mathbf{e}_r$  contenue dans le plan de base, est alors définie par :

$$(2.5) \quad {}^gD_{rr} = \gamma D.$$

Les relations entre les paramètres  $\delta_i$  et  $\psi$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont obtenues par identification entre les relations (2.2) et (2.3), (2.4) et (2.5) comme :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \frac{\psi}{2}\beta \\ \delta_2 = \psi(\beta\frac{\gamma+2}{4\gamma-1} - 1) \text{tr}(\mathbf{M}_3\mathbf{S}) \\ \delta_3 = \frac{\psi}{2}(1-\beta) \end{array} \right. .$$

En utilisant (2.6), la loi (2.2) qui décrit le comportement viscoplastique linéaire du monocristal de glace est réécrite sous la forme :

$$(2.7) \quad \mathbf{D} = \frac{\psi}{2} \left( \beta\mathbf{S} + 2(\beta\frac{\gamma+2}{4\gamma-1} - 1) \text{tr}(\mathbf{M}_3\mathbf{S})\mathbf{M}_3^D + (1-\beta)(\mathbf{M}_3\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{M}_3)^D \right).$$

Avec la notation de Voigt :

$$(2.8) \quad {}^g\mathbf{d} = \begin{bmatrix} {}^gD_{11} \\ {}^gD_{22} \\ {}^gD_{33} \\ 2 {}^gD_{23} \\ 2 {}^gD_{31} \\ 2 {}^gD_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^g\mathbf{s} = \begin{bmatrix} {}^gS_{11} \\ {}^gS_{22} \\ {}^gS_{33} \\ {}^gS_{23} \\ {}^gS_{31} \\ {}^gS_{12} \end{bmatrix},$$

la forme matricielle associée à la loi (2.7), exprimée dans le repère du grain  $\{{}^g\mathbf{R}\}$ , peut se mettre sous la forme :

$$(2.9) \quad {}^g\mathbf{d} = \frac{\psi}{2} \begin{bmatrix} \beta\frac{2\gamma+1}{4\gamma-1} & -2\beta\frac{\gamma-1}{4\gamma-1} & & & & \\ -2\beta\frac{\gamma-1}{4\gamma-1} & \beta\frac{2\gamma+1}{4\gamma-1} & & & & \\ & & \frac{3\beta}{4\gamma-1} & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2\beta \end{bmatrix} {}^g\mathbf{s}.$$

Notons que cette loi de comportement ne s'écrit pas de façon unique (sous forme matricielle) puisque  $\text{tr} \mathbf{S} = 0$  et que chaque  ${}^gS_{ii}$  peut donc s'exprimer en fonction des deux autres. Nous avons fait le choix d'une matrice symétrique qui rend compte de l'orthotropie de révolution du matériau.

La loi (2.7) conduit à une forme matricielle identique à celle proposée par Meyssonier et Philip (1996).

De même, nous pouvons définir le potentiel de dissipation  $\phi_S$  associé à la loi (2.7) comme étant la forme quadratique engendrée à partir des invariants  $\text{tr}(\mathbf{M}_3\mathbf{S})$ ,  $\text{tr}(\mathbf{M}_3\mathbf{S}^2)$

et  $\text{tr}(\mathbf{S}^2)$ . Par définition :

$$(2.10) \quad \mathbf{D} = \frac{\partial \phi_S}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \phi_S}{\partial \mathbf{S}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial \mathbf{S}} \right) \mathbf{I} = \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial \mathbf{S}} \right)^D.$$

En utilisant les relations :

$$(2.11) \quad \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{M}_3, \quad \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S}^2)}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{M}_3 \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{M}_3, \quad \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{S}^2)}{\partial \mathbf{S}} = 2\mathbf{S},$$

le potentiel de dissipation du cristal de glace est obtenu par intégration comme :

$$(2.12) \quad \phi_S = \frac{\psi}{2} \left( \frac{\beta}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^2) + \left( \beta \frac{\gamma + 2}{4\gamma - 1} - 1 \right) \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S})^2 + (1 - \beta) \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S}^2) \right).$$

Lorsque le potentiel (2.12) est écrit sous la forme irréductible (A.6) donnée en **Annexe A**, la vérification de la condition  $\phi_S > 0$  entraîne que  $\beta$  et  $\gamma$  satisfassent les inégalités :

$$(2.13) \quad \left| \begin{array}{l} \beta \geq 0 \\ \gamma > \frac{1}{4} \end{array} \right. .$$

Pour le cristal de glace, il est beaucoup plus facile de déformer le grain par cisaillement parallèlement au plan de base que dans le plan (Duval *et al.*, 1983), ce qui implique que  $\beta$  doit être inférieur à 1. Les essais expérimentaux (Duval *et al.*, 1983) tendent à montrer qu'il est plus facile de déformer le cristal en compression selon une direction comprise dans le plan de base que parallèlement à l'axe- $c$ . Ceci correspond à des valeurs de  $\gamma$  supérieures à 1. Néanmoins, l'anisotropie de cisaillement (caractérisée par  $\beta$ ) est beaucoup plus marquée que celle en traction-compression (caractérisée par  $\gamma$ ) et dans la pratique,  $\beta$  sera proche de 0 tandis que  $\gamma$  sera proche de 1.

Si  $\beta = 1$  et  $\gamma = 1$  le comportement du grain est identique à celui d'un matériau isotrope et nous retrouvons la forme classique du potentiel pour un corps newtonien :  $\Phi_S = \psi \tau^2 / 2$ , avec  $2\tau^2 = \text{tr}(\mathbf{S}^2)$ .

Si  $\beta = 0$  le grain ne se déforme que par glissement dans les plans de base. Le comportement du grain n'est alors fonction que de la fluidité en cisaillement  $\psi$  parallèlement au plan de base. La plupart des modèles utilisent cette forme simplifiée pour décrire le comportement du monocristal de glace (Van der Giessen et Van Houtte, 1992; Lliboutry, 1993; Van der Veen et Whillans, 1994). Nous montrerons que la loi (2.7) conduit à un comportement de polycristal plus réaliste, même pour des valeurs très faibles de  $\beta$ .

### 2.2.2 Comportement non-linéaire

Lorsque le comportement du grain n'est plus supposé linéaire ( $n \neq 1$ ), le nombre de paramètres rhéologiques nécessaires augmente. Par exemple, si  $n = 3$ , le potentiel viscoplastique du matériau orthotrope de révolution incompressible dépend de sept paramètres indépendants (Boehler, 1978). La détermination de ces sept coefficients à partir d'essais

expérimentaux est difficilement envisageable. Nous adopterons donc la forme simplifiée suivante pour le potentiel  $\phi_S$ , dérivée du cas linéaire (2.12) :

$$(2.14) \quad \phi_s^{(n)} = \frac{\psi_n}{n+1} \left( \frac{\beta}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^2) + \left( \beta \frac{\gamma+2}{4\gamma-1} - 1 \right) \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S})^2 + (1-\beta) \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S}^2) \right)^{(n+1)/2}.$$

La forme de potentiel adoptée (2.14) implique que, quelle que soit la valeur de l'exposant  $n$ , les rapports d'anisotropie du cristal, caractérisés par  $\beta$  et  $\gamma$ , sont identiques. La forme matricielle associée au potentiel (2.14) est définie à partir de l'expression (2.9) en posant :

$$(2.15) \quad \psi = \psi_n \left( \frac{\beta}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^2) + \left( \beta \frac{\gamma+2}{4\gamma-1} - 1 \right) \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S})^2 + (1-\beta) \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S}^2) \right)^{(n-1)/2},$$

où  $\psi$  est alors une fluidité apparente, fonction des contraintes.

La loi de comportement du cristal de glace adoptée est donc donnée dans le cas non-linéaire par :

$$(2.16) \quad \mathbf{D} = \frac{\psi_n}{2} \left( \frac{\beta}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^2) + \left( \beta \frac{\gamma+2}{4\gamma-1} - 1 \right) \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S})^2 + (1-\beta) \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S}^2) \right)^{(n-1)/2} \times \\ \left( \beta \mathbf{S} + 2 \left( \beta \frac{\gamma+2}{4\gamma-1} - 1 \right) \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S}) \mathbf{M}_3^D + (1-\beta) (\mathbf{M}_3 \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{M}_3)^D \right),$$

et peut se mettre sous la forme condensée :

$$(2.17) \quad \mathbf{D} = \alpha_{1n} \mathbf{S} + \alpha_{2n} \mathbf{M}_3^D + \alpha_{3n} (\mathbf{S} \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \mathbf{S})^D,$$

où les  $\alpha_{i_n}$  sont uniquement fonction des paramètres rhéologiques du grain  $\psi_n$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et des trois invariants  $\text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S})$ ,  $\text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S}^2)$  et  $\text{tr}(\mathbf{S}^2)$ .

## 2.3 Comparaison avec le modèle à trois plans de glissement

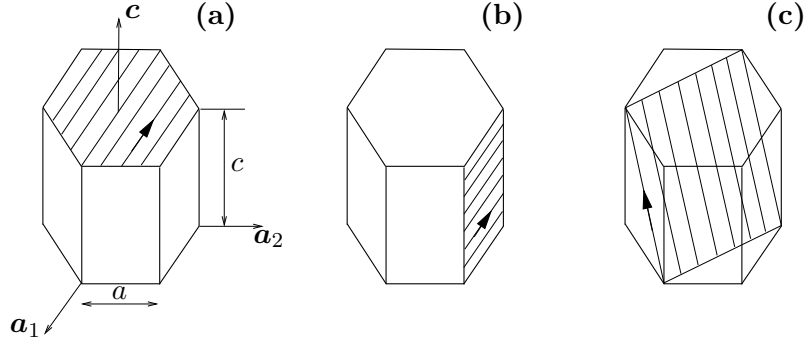
Castelnau (1996) utilise un modèle de grain tenant compte du glissement dans les plans basal, prismatique et pyramidal, définis sur la Figure 2.2. Nous démontrons ici que, lorsque le grain est linéaire, ce modèle de comportement est rigoureusement identique à celui que nous avons adopté.

D'après Castelnau (1996), dans le cas linéaire, la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}^s$  sur le système de glissement  $s$  est proportionnelle à la contrainte de cisaillement  $\tau^s$  :

$$(2.18) \quad \dot{\gamma}^s = \frac{\tau^s}{\tau_0^s},$$

où  $\tau_0^s$  est la contrainte de référence microscopique du système de glissement  $s$ . La contrainte de cisaillement  $\tau^s$  est donnée par :

$$(2.19) \quad \tau^s = \mathbf{r}^s : \mathbf{S},$$



**Fig. 2.2 :** Définition des plans (a) basal, (b) prismatique et (c) pyramidal utilisés par Castelnau (1996).

où le tenseur de Schmid  $\mathbf{r}^s$  est défini à partir des vecteurs unitaires normal au plan de glissement ( $\mathbf{n}^s$ ) et parallèle au vecteur de Burgers ( $\mathbf{b}^s$ ) comme :

$$(2.20) \quad \mathbf{r}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{n}^s \otimes \mathbf{b}^s + \mathbf{b}^s \otimes \mathbf{n}^s).$$

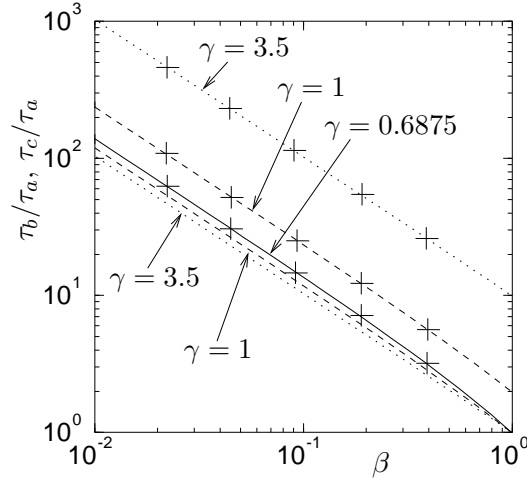
La vitesse de déformation est définie comme étant la somme des déformations sur tous les systèmes de glissement du monocristal, soit :

$$(2.21) \quad \mathbf{D} = \sum_{i=1}^s \mathbf{r}^i \frac{\dot{\gamma}_i}{\tau_0^i}.$$

En considérant les douze systèmes de glissement adoptés par Castelnau (1996) (trois dans le plan basal, trois pour la famille des plans prismatiques et six pour la famille des plans pyramidaux), la loi de comportement du monocristal (2.21) peut se mettre sous une forme matricielle similaire à (2.9) :

$$(2.22) \quad {}^g\mathbf{d} = 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{8\tau_b} + \frac{7\chi_1}{4\tau_c} & -\frac{1}{8\tau_b} + \frac{5\chi_1}{4\tau_c} & & & & \\ -\frac{1}{8\tau_b} + \frac{5\chi_1}{4\tau_c} & \frac{1}{8\tau_b} + \frac{7\chi_1}{4\tau_c} & & & & \\ & & \frac{3\chi_1}{\tau_c} & & & \\ & & & \frac{1}{2\tau_a} + \frac{\chi_2}{\tau_c} & & \\ & & & & \frac{1}{2\tau_a} + \frac{\chi_2}{\tau_c} & \\ & & & & & \frac{1}{2\tau_b} + \frac{\chi_1}{\tau_c} \end{bmatrix} {}^g\mathbf{s},$$

où  $\tau_a$ ,  $\tau_b$  et  $\tau_c$  sont les contraintes de référence des familles basale, prismatique et pyramidale, respectivement. Les constantes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont définies en fonction des dimensions



**Fig. 2.3** : Evolution des rapports  $\tau_b/\tau_a$  (courbe) et  $\tau_c/\tau_a$  (courbe et +) en fonction de  $\beta$  et pour différentes valeurs de  $\gamma$  :  $\gamma = 0.6875$  (trait plein),  $\gamma = 1$  (tirets) et  $\gamma = 3.5$  (pointillés). Lorsque  $\gamma = 0.6875$  les courbes sont confondues car  $\tau_b = \tau_c$ .

caractéristiques du réseau cristallographique de la glace par :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \chi_1 = \left( \frac{ac}{a^2 + c^2} \right)^2 \\ \chi_2 = \chi_1 \left( \frac{a}{c} - \frac{c}{a} \right)^2 \end{cases},$$

avec  $c/a = 1.629$  pour le cristal de glace.

Par identification des coefficients des formes matricielles (2.22) et (2.9), nous obtenons les relations :

$$(2.24) \quad \begin{cases} \frac{1}{\tau_a} = \frac{\psi}{3} \left( 2 - \frac{\chi_2}{\chi_1} \frac{\beta}{4\gamma - 1} \right) \\ \frac{1}{\tau_b} = \beta \frac{\psi}{3} \frac{8\gamma - 3}{4\gamma - 1} \\ \frac{1}{\tau_c} = \frac{\psi}{6\chi_1} \frac{\beta}{4\gamma - 1} \end{cases}.$$

Sur la Figure 2.3 est tracée l'évolution de  $\tau_b/\tau_a$  et  $\tau_c/\tau_a$  en fonction de  $\beta$  pour  $\gamma = 0.6875$ ,  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 3.5$ . Lorsque  $\gamma = 0.6875$ , les contraintes de référence  $\tau_b$  et  $\tau_c$  sont égales, et la valeur du rapport  $\tau_b/\tau_a = 70$  adoptée par Castelnau (1996) est obtenue pour  $\beta = 0.02$ . L'influence de  $\gamma$  est essentiellement visible sur la dureté de la famille pyramidale ( $\tau_c$ ) : plus  $\gamma$  augmente, plus la dureté de ce système de glissement est importante. La raison est que seul le glissement dans le plan pyramidal entraîne des déformations parallèlement à l'axe- $c$  et que, dans notre modèle, ces déformations sont proportionnelles à  $\gamma$ .

## 2.4 Conclusion

Nous avons formulé la loi de comportement du cristal de glace sous une forme invariante par changement de référentiel. Nous avons fait l'hypothèse que les comportements linéaire et non-linéaire dépendent des deux mêmes paramètres d'anisotropie  $\beta$  et  $\gamma$  et de la fluidité dans le plan de base  $\psi_n$ .

En faisant varier  $\beta$  et  $\gamma$  nous pouvons décrire une gamme d'anisotropie allant d'un grain se déformant uniquement par glissement basal ( $\beta = 0$ ) à un grain isotrope ( $\beta = 1$  et  $\gamma = 1$ ). Nous montrerons dans les chapitres suivants l'influence de de ces paramètres d'anisotropie sur la réponse du polycristal.

Enfin, nous avons montré que, dans le cas linéaire, notre modèle de comportement de grain est identique au modèle plus physique de Castelnau (1996) mettant en jeu le glissement sur les plans cristallographiques.



## Chapitre 3

# Evolution de la fabrique du polycristal de glace

### 3.1 Introduction

Du fait de l'anisotropie viscoplastique du cristal de glace, la déformation du grain s'accompagne d'une rotation des plans de base par rapport au repère de référence. Ces rotations créent des fabriques qui sont caractéristiques du chargement appliqué au polycristal.

Nous donnons dans ce chapitre les équations qui permettent de décrire la rotation de l'axe- $c$  d'un cristal pendant un incrément de temps  $dt$  et pour des conditions de chargement données. A partir de ces équations, nous montrons qu'il est possible de prévoir la forme des fabriques obtenues pour différents cas de chargement simples. Ensuite, nous présentons des expressions analytiques de l'ODF obtenues pour différents cas de chargement, lorsque le comportement du grain est linéaire.

### 3.2 Equations descriptives de l'évolution de la fabrique

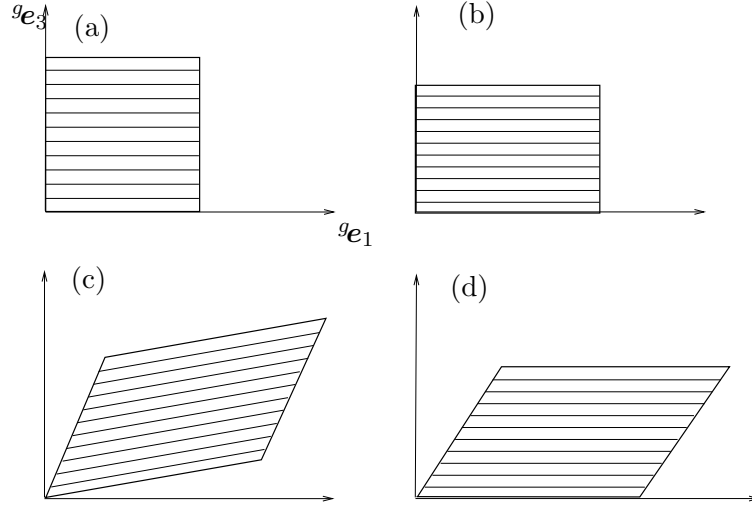
#### 3.2.1 Hypothèses

Nous donnons ici les principales hypothèses sur lesquelles est fondé le modèle d'évolution de la fabrique.

#### **h0. Contraintes homogènes**

Le modèle à contraintes homogènes, ou modèle statique, suppose que les contraintes dans chaque grain qui compose le polycristal sont égales aux contraintes macroscopiques, soit  $\sigma = \bar{\sigma}$ .

L'hypothèse de contraintes homogènes implique que l'influence des grains voisins n'est pas prise en compte dans le calcul de l'évolution de l'orientation : chaque grain est considéré comme étant isolé des autres grains.



**Fig. 3.1 :** Décomposition de la transformation du cristal de glace (2D) en étapes représentant (b) l'effet de  $gD_{11} dt > 0$  et  $gD_{33} dt = -gD_{11} dt < 0$ , (c) puis l'effet de  $gD_{13} dt > 0$  et (d) enfin la rotation  $gW_{13} dt = gD_{13} dt > 0$ . En (a) le cristal n'est pas déformé.

### h1. Déformation du grain

Le comportement du grain, supposé orthotrope de révolution, est donné par son potentiel viscoplastique (2.12). Nous faisons l'hypothèse que les plans de base restent parallèles entre eux au cours de la déformation. Ceci implique que la composante des vitesses selon  $g_{e_3}$  est seulement fonction de  $g_{x_3}$  et que, par conséquent, le tenseur du gradient des vitesses exprimée dans le repère du grain  $\{gR\}$ , défini par  $gL_{ij} = gu_{i,j}$ , a la forme suivante :

$$g\mathbf{L} = \begin{bmatrix} gu_{1,1} & gu_{1,2} & gu_{1,3} \\ gu_{2,1} & gu_{2,2} & gu_{2,3} \\ 0 & 0 & gu_{3,3} \end{bmatrix}.$$

La décomposition de  $g\mathbf{L}$  en sa partie symétrique  $g\mathbf{D}$  et sa partie antisymétrique  $g\mathbf{W}$  conduit aux égalités suivantes :

$$(3.1) \quad \begin{cases} gD_{13} = gW_{13} \\ gD_{23} = gW_{23} \end{cases}.$$

Le grain se déforme comme un paquet de cartes dont les cartes auraient la possibilité de se dilater de façon uniforme. Cette hypothèse permet de continuer à repérer un grain par son seul axe- $c$ . La Figure 3.1 représente en 2D la décomposition de la transformation du grain dans le plan  $(g_{e_1}, g_{e_3})$ .

### h2. Pas de recristallisation

Tous les grains qui composent le polycristal occupent le même volume et le nombre total de grains ne change pas durant l'évolution de la fabrique. Cette hypothèse implique que

les phénomènes de recristallisation (grossissement des grains, nucléation de nouveaux grains, ...) ne sont pas pris en compte par notre modèle.

### h3. Rotation par rapport à $\{R\}$

Nous supposons que pour chaque grain les vitesses de rotation par rapport au repère de référence  $\{R\}$  sont égales aux vitesses de rotation macroscopiques par rapport à  $\{R\}$ , soit  $\mathbf{W} = \bar{\mathbf{W}}$ . Cette hypothèse est nécessaire puisque le modèle à contraintes homogènes n'introduit pas de formule d'interaction entre les grains, notamment pour les rotations.

#### 3.2.2 Rotation de l'axe- $c$ d'un grain

Un grain est repéré par l'orientation de son axe- $c$ . Les composantes du vecteur unitaire dirigé selon l'axe- $c$  du cristal, soit  ${}^g\mathbf{c} = (0, 0, 1)$  dans le repère lié au grain  $\{^gR\}$ , sont données dans le repère référence  $\{R\}$  par :

$$(3.2) \quad \mathbf{c} = \mathbf{R} {}^g\mathbf{c}$$

où  $\mathbf{R}$  est la matrice de rotation (2.1).

La nouvelle orientation du grain par rapport au repère  $\{^gR\}$ , sous l'effet du gradient des vitesses  ${}^g\mathbf{L}$  pendant l'incrément de temps  $dt$ , s'exprime comme :

$$(3.3) \quad d{}^g\mathbf{c} = {}^g\mathbf{L} {}^g\mathbf{c} dt.$$

La différentielle de (3.2) par rapport au temps donne le changement d'orientation du grain par rapport au référentiel de référence  $\{R\}$  pendant  $dt$ , soit :

$$(3.4) \quad d\mathbf{c} = d\mathbf{R} {}^g\mathbf{c} + \mathbf{R} d{}^g\mathbf{c} = (\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} {}^g\mathbf{L}) {}^g\mathbf{c} dt.$$

D'autre part, pendant un incrément de temps  $dt$ ,  $\mathbf{c}$  se transforme en  $\mathbf{c} + d\mathbf{c}$  sous l'action du gradient des vitesses  $\mathbf{L}$  par rapport à  $\{R\}$ , tel que :

$$(3.5) \quad d\mathbf{c} = \mathbf{L} \mathbf{c} dt = \mathbf{L} \mathbf{R} {}^g\mathbf{c} dt.$$

L'égalité des relations (3.4) et (3.5) conduit au système d'équations suivant :

$$(3.6) \quad (\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{R}} + {}^g\mathbf{L} - \mathbf{R}^t \mathbf{L} \mathbf{R}) {}^g\mathbf{c} = 0.$$

Sachant que  $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$  et que  ${}^g\mathbf{D} = \mathbf{R}^t \mathbf{D} \mathbf{R}$ , le système d'équation (3.6) se réduit à :

$$(3.7) \quad (\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{R}} + {}^g\mathbf{W} - \mathbf{R}^t \mathbf{W} \mathbf{R}) {}^g\mathbf{c} = 0.$$

Cette équation exprime la composition des vitesses de rotation. En utilisant l'hypothèse **h3** ( $\mathbf{W} = \bar{\mathbf{W}}$ ), la relation (3.7) donne la vitesse de rotation de l'axe- $c$  par rapport au repère de référence  $\{R\}$ , déterminée par  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  qui apparaissent dans  $\dot{\mathbf{R}}$ . Ces vitesses angulaires sont fonction de l'orientation du grain  $(\theta, \varphi)$ , des vitesses de déformation dans le plan de base du grain (en utilisant les relations (3.1)) et des vitesses de rotation macroscopiques :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = -{}^gD_{13} + \bar{W}_{13} \cos \varphi + \bar{W}_{23} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} \sin \theta = -{}^gD_{23} - \bar{W}_{12} \sin \theta - (\bar{W}_{13} \sin \varphi - \bar{W}_{23} \cos \varphi) \cos \theta \end{cases}.$$

Avec l'hypothèse (**h0**) de contraintes homogènes dans le polycristal, les vitesses de déformation  ${}^gD_{13}$  et  ${}^gD_{23}$  sont déterminées en fonction des contraintes macroscopiques et de la loi de comportement du cristal (2.12).

Notons que les équations (3.7) restent valables pour les modèles de Taylor et auto-cohérent utilisant le même modèle de comportement de grain, mais ces modèles diffèrent par la manière dont sont déterminées  ${}^gD_{13}$  et  ${}^gD_{23}$ , ainsi que les composantes de  $\mathbf{W}$ .

La vitesse de rotation macroscopique  $\bar{\mathbf{W}}$  est déduite de la cinématique du problème à une échelle supérieure à celle du polycristal. Par exemple, si l'évolution de la fabrique est calculée le long d'une ligne de courant partant de la surface d'une calotte polaire,  $\bar{\mathbf{W}}$  est déterminée à partir du champ des vitesses dans la calotte polaire (*cf.* **Chapitre 7**).

Lorsque le comportement du grain est linéaire, l'utilisation de la loi de comportement du grain (2.7) dans (3.8) permet, après passage dans le repère de référence, d'exprimer les vitesses de rotation du grain en fonction des contraintes déviatoires et des vitesses de rotation macroscopiques :

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} = & -\frac{\psi}{4} \sin 2\theta [\bar{S}_{11}(1 + \cos^2 \varphi) + \bar{S}_{22}(1 + \sin^2 \varphi) + \bar{S}_{12} \sin 2\varphi] \\
 & -\frac{\psi}{2} \cos 2\theta [\bar{S}_{13} \cos \varphi + \bar{S}_{23} \sin \varphi] + \bar{W}_{13} \cos \varphi + \bar{W}_{23} \sin \varphi, \\
 (3.9) \quad \dot{\varphi} \sin \theta = & \frac{\psi}{4} \sin \theta [(\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22}) \sin 2\varphi - 2\bar{S}_{12} \cos 2\varphi] \\
 & + \frac{\psi}{2} \cos \theta (\bar{S}_{13} \sin \varphi - \bar{S}_{23} \cos \varphi) \\
 & - \bar{W}_{12} \sin \theta - (\bar{W}_{13} \sin \varphi - \bar{W}_{23} \cos \varphi) \cos \theta.
 \end{aligned}$$

### 3.2.3 Equation locale de la conservation du nombre de grains

Nous allons traduire de façon locale (*i.e.* à l'échelle du mouvement de chaque grain) l'équation de la conservation du nombre total de grains (1.8). Nous considérons la fonction de distribution des orientations  $f(\theta, \varphi, \mathbf{x}, t)$ , où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  représente la position d'un point de l'espace dans le repère de référence  $\{\mathbf{R}\}$ , et  $t$  le temps. Nous distinguons l'espace des coordonnées spatiales décrit par  $\mathbf{x}$ , et l'espace des orientations cristallographiques décrit par  $\theta$  et  $\varphi$ . En chaque point  $\mathbf{x}$  est attachée une représentation de la fabrique dans l'espace des orientations cristallographiques. Tous les grains qui composent le polycristal situé au point  $\mathbf{x}$  sont eux aussi exactement au point  $\mathbf{x}$  et ils sont donc sans dimension dans l'espace des coordonnées spatiales.

La variation, pendant un incrément de temps  $dt$ , du nombre de grains contenus dans l'intervalle surfacique de la sphère unité de l'espace des orientations  $(\theta, \theta + d\theta; \varphi, \varphi + d\varphi)$ , et dans le volume  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  au point  $\mathbf{x}$ , soit

$$\frac{\partial f \sin \theta}{\partial t} d\theta d\varphi dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

est égale à la somme du flux des grains ayant l'orientation  $(\theta, \varphi)$  qui arrivent (ou partent) en  $\mathbf{x}$ , entraînés par l'écoulement macroscopique, et du flux des grains situés en  $\mathbf{x}$  entrant

(ou sortant) dans de l'intervalle des orientations  $(\theta, \theta + d\theta; \varphi, \varphi + d\varphi)$ , soit

$$-\left(\frac{\partial \bar{u}_i f \sin \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{\theta} f \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\varphi} f \sin \theta}{\partial \varphi}\right) d\theta d\varphi dx_1 dx_2 dx_3 dt,$$

où les  $\bar{u}_i$  sont les composantes du vecteur vitesse macroscopique au point  $\mathbf{x}$ . La glace étant incompressible ( $\bar{D}_{ii} = 0$ ), l'équation locale de la conservation du nombre de grains s'écrit :

$$(3.10) \quad \frac{\partial f \sin \theta}{\partial t} + \frac{\partial f \sin \theta}{\partial x_i} \bar{u}_i + \frac{\partial \dot{\theta} f \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\varphi} f \sin \theta}{\partial \varphi} = 0.$$

### 3.3 Prédiction des fabriques

Pour des conditions de chargement fixées, les vitesses de rotation d'un grain données par (3.9) dépendent seulement de son orientation. L'étude du signe et des variations de  $\dot{\theta}(\theta, \varphi)$  et  $\dot{\varphi}(\theta, \varphi)$  permet de prédire l'orientation finale des grains en fonction des conditions aux limites appliquées. En effet, une position d'équilibre  $(\theta_0, \varphi_0)$  est stable, et correspondra donc à un point d'accumulation des axes- $c$ , si :

$$(3.11) \quad \left| \begin{array}{l} \dot{\theta}(\theta_0, \varphi_0) = 0 \\ \dot{\varphi}(\theta_0, \varphi_0) = 0 \end{array} \right. ,$$

et, d'après les calculs présentés en **Annexe B**, si

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \Big|_0 < 0 \\ \text{ou} \quad \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} \Big|_0 < 0 \end{array} \right. , \text{ et } 4 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \Big|_0 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} \Big|_0 > \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \varphi} \Big|_0 + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \theta} \Big|_0 \right)^2 ,$$

ou

$$(3.13) \quad \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} \Big|_0 = 0, \text{ et } \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \varphi} \Big|_0 + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \theta} \Big|_0 = 0, \text{ et } \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \Big|_0 < 0,$$

ou

$$(3.14) \quad \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \Big|_0 = 0, \text{ et } \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \varphi} \Big|_0 + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \theta} \Big|_0 = 0, \text{ et } \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} \Big|_0 < 0.$$

Nous présentons ici l'étude de la prédiction des fabriques pour trois cas de chargement : une compression et une traction selon l'axe  $\mathbf{e}_1$  et un cisaillement pur  $\bar{S}_{13} > 0$ . L'étude des fabriques de cisaillement simple, qui nécessite la connaissance de la loi de comportement du polycristal, sera traitée au **Chapitre 5** et dans les **Annexes D** et **E**.

### 3.3.1 Compression et traction

Pour une compression-traction dans la direction  $\mathbf{e}_1$ , définie par  $\sigma_{22} = \sigma_{33}$  et  $\sigma_{11} = \sigma_{22} + \bar{\sigma}$  (soit  $\bar{S}_{11} = 2\bar{\sigma}/3$ ,  $\bar{S}_{22} = \bar{S}_{33} = -\bar{\sigma}/3$ ,  $\bar{S}_{23} = \bar{S}_{31} = \bar{S}_{12} = 0$  et  $\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{0}$ ), les équations (3.9) se réduisent à :

$$(3.15) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = -\frac{\psi\bar{\sigma}}{4} \sin 2\theta \cos^2 \varphi \\ \dot{\varphi} = \frac{\psi\bar{\sigma}}{4} \sin 2\varphi \end{cases}.$$

Les positions possibles de concentration des orientations vérifiant  $\dot{\theta} = 0$  et  $\dot{\varphi} = 0$  sont :

$$(3.16) \quad \varphi = \pm\pi/2 \quad \forall \theta, \text{ et } \begin{cases} \theta = m\pi/2 & m = 0, 1 \\ \varphi = n\pi/2 & n = 0, 1, 2, 3 \end{cases},$$

Pour une compression ( $\bar{\sigma} < 0$ ), les positions stables des orientations sont en  $(\theta = \pi/2, \varphi = 0)$  et  $(\theta = \pi/2, \varphi = \pi/2)$ , soit en fait une seule direction ( $\mathbf{e}_1$ ). Pour une traction ( $\bar{\sigma} > 0$ ), la zone de stabilité correspond au cercle défini par  $\varphi = \pm\pi/2$ .

Nous retrouvons bien une fabrique concentrée selon l'axe de la compression et une fabrique en forme de couronne dans le plan perpendiculaire à l'axe de la traction. Sur les Figures 3.2b et 3.2c, la trajectoire de l'orientation d'un grain est représentée par des croix espacées suivant un intervalle de temps constant. L'orientation initiale du grain est marquée par un carré. Nous pouvons remarquer que l'axe- $c$  du grain tourne avec une vitesse décroissante vers la zone d'équilibre stable marquée en gris.

### 3.3.2 Cisaillement pur

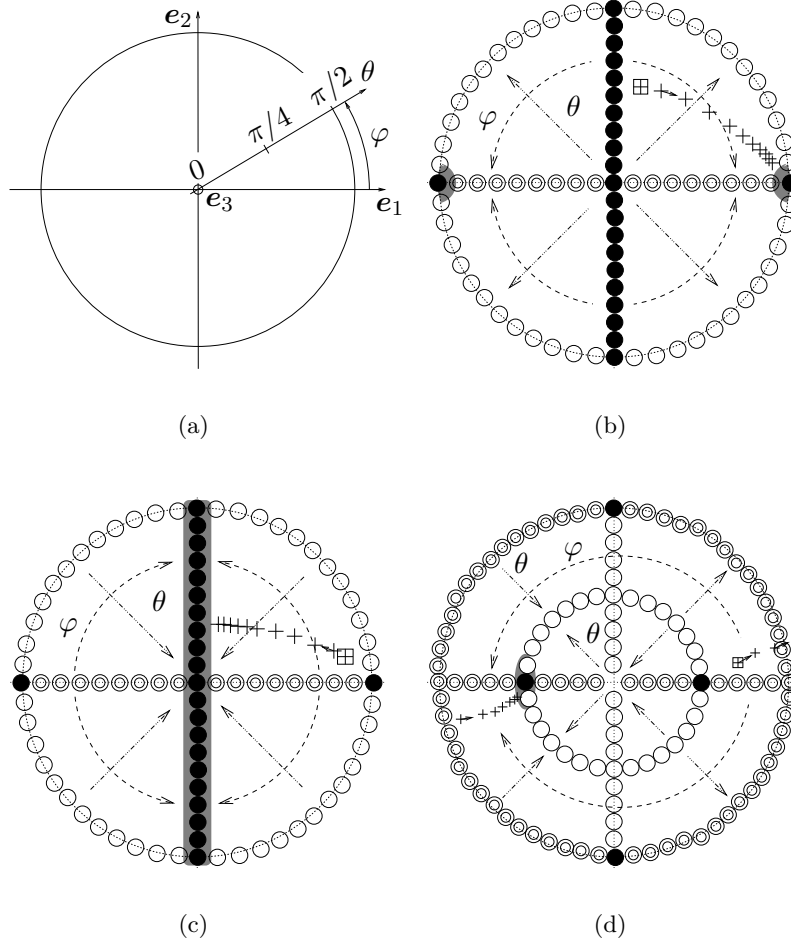
Dans le cas d'un chargement en cisaillement pur (seul  $\bar{S}_{13} \neq 0$  et  $\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{0}$ ), les équations (3.9) se réduisent à :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -\frac{\psi\bar{S}_{13}}{2} \cos 2\theta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \sin \theta = \frac{\psi\bar{S}_{13}}{2} \cos \theta \sin \varphi \end{cases}.$$

Les quatre points où  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  s'annulent sont  $(\theta = \pi/2, \varphi = \pm\pi/2)$ ,  $(\theta = \pi/4, \varphi = 0)$  et  $(\theta = \pi/4, \varphi = \pi)$ . Dans le cas où  $\bar{S}_{13} > 0$  le seul point d'équilibre stable est  $(\theta = \pi/4, \varphi = \pi)$ . Sur la Figure 3.2d est représentée la trajectoire de l'orientation d'un grain. Lorsque  $\theta$  devient supérieur à  $\pi/2$ , l'orientation du grain est décrite par  $-\mathbf{e}_3$ , ce qui explique la réapparition de l'orientation du grain en  $(\theta = \pi/2, \pi - \varphi)$ .

## 3.4 Solutions analytiques pour l'ODF

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'évolution de la fabrique d'un élément de volume le long de sa trajectoire. Ceci revient à étudier l'évolution de la fabrique d'un



**Fig. 3.2 :** (a) Espace des orientations en projection de Schmidt sur le plan  $(e_1, e_2)$  et définition de  $\theta$  et  $\varphi$ . Zones où  $(\circ) \dot{\theta} = 0$ ,  $(\odot) \dot{\varphi} = 0$ ,  $(\bullet) \dot{\theta} = 0$  et  $\dot{\varphi} = 0$  pour (b) une compression uniaxiale selon  $e_1$ , (c) une traction uniaxiale selon  $e_1$  et (d) un cisaillement pur ( $\bar{S}_{13} > 0$ ). Les flèches pointillées représentent le sens de la rotation selon  $\varphi$  et les flèches en traits mixtes celui selon  $\theta$ . La trajectoire de l'orientation d'un grain est représentée par les croix pour les trois cas de chargement : son orientation initiale est marquée par un carré et l'intervalle de temps est constant entre deux croix successives. Les zones grisées représentent les lieux d'équilibre stable où les orientations des grains vont s'accumuler.

polycristal isolé<sup>1</sup> en fonction du temps. Dans ces conditions, l'équation locale de la conservation du nombre de grains (3.10) se réduit à :

$$(3.17) \quad \frac{\partial f \sin \theta}{\partial t} + \frac{\partial \dot{\theta} f \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\varphi} f \sin \theta}{\partial \varphi} = 0.$$

Van der Giessen et Van Houtte (1992), puis Svendsen et Hutter (1996) ont proposé des solutions analytiques pour l'ODF lorsque le polycristal est composé de cristaux 2D dont les axes- $c$  sont contenus dans un même plan. En faisant l'hypothèse de vitesses de déformation homogènes et en supposant le comportement du grain linéaire, Van der Giessen et Van Houtte (1992) obtiennent une formulation générale pour un état de déformation plan. Nous avons étendu ces résultats au cas du polycristal 3D, mais en faisant l'hypothèse de contraintes homogènes. Toutefois, comme nous le montrons plus loin dans ce chapitre, l'extension de nos résultats au modèle à vitesses de déformation homogènes (Taylor) est immédiate puisque les équations initiales sont les mêmes.

### 3.4.1 Hypothèses supplémentaires

Nous donnons ici les hypothèses supplémentaires qui permettent d'intégrer analytiquement l'équation différentielle (3.17).

**h4.** Le comportement du grain est linéaire et  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  sont donc donnés par les équations (3.9).

**h5.** Les vitesses de rotation macroscopiques sont nulles, soit  $\bar{W}_{13} = \bar{W}_{23} = \bar{W}_{12} = 0$ .

**h6.** La fabrique est isotrope à  $t = 0$ , soit  $f(\theta, \varphi, 0) = 1$ .

**h7.** Les directions des contraintes principales restent fixes au cours de la déformation et le tenseur des contraintes déviatoires a la forme suivante :

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & 0 \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S}_{33} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\bar{S}_1 + \bar{S}_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \frac{\bar{S}_1 - \bar{S}_2}{2} \begin{bmatrix} \cos 2\lambda & \sin 2\lambda & 0 \\ \sin 2\lambda & -\cos 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

où  $\bar{S}_1$  et  $\bar{S}_2$  sont les contraintes déviatoires principales et  $\lambda$  l'angle entre le repère de référence  $\{\mathbf{R}\}$  et le repère des contraintes principales restant constant au cours du temps, défini par :

$$(3.19) \quad \left| \begin{array}{l} \sin 2\lambda = 2 \frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_\lambda}, \quad \cos 2\lambda = \frac{\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22}}{\bar{S}_\lambda} \\ \text{avec } \bar{S}_\lambda^2 = (\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22})^2 + 4\bar{S}_{12}^2 = (\bar{S}_1 - \bar{S}_2)^2 \end{array} \right.$$

Notons que ce type de chargement ne repose ni sur l'hypothèse de contrainte plane, ni sur l'hypothèse de déformation plane, il suppose seulement que le champ de vitesses reste symétrique par rapport au plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

<sup>1</sup>Par exemple, un échantillon de glace polycristalline sous presse au laboratoire.



### 3.4.2 Expression de l'ODF dans le cas d'un chargement plan

Les hypothèses **h4**, **h5** et **h7** entraînent que les équations (3.9) se réduisent à :

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = -\frac{\psi}{8} \sin 2\theta [3(\bar{S}_{11} + \bar{S}_{22}) + (\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22}) \cos 2\varphi + 2\bar{S}_{12} \sin 2\varphi] \\ \dot{\varphi} = \frac{\psi}{4} [(\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22}) \sin 2\varphi - 2\bar{S}_{12} \cos 2\varphi] \end{array} \right. .$$

En utilisant (3.19), les équations (3.20) se mettent sous la forme :

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = -\frac{\psi}{8} \sin 2\theta [3(\bar{S}_{11} + \bar{S}_{22}) + \bar{S}_{\lambda} \cos 2(\varphi - \lambda)] \\ \dot{\varphi} = \frac{\psi}{4} \bar{S}_{\lambda} \sin 2(\varphi - \lambda) \end{array} \right. .$$

Ayant supposé que les directions principales de  $\bar{\mathbf{S}}$  restent fixes au cours du temps (**h7**, *i.e.*  $\lambda$  est constant au cours du temps) et que la fabrique est isotrope à  $t = 0$  (**h6**), nous pouvons résoudre l'équation différentielle (3.17) avec les expressions (3.21) pour  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$ .

Nous obtenons les expressions de  $\theta$  et  $\varphi$  en fonction du temps et des valeurs initiales  $\theta_0 = \theta(0)$  et  $\varphi_0 = \varphi(0)$ , à  $t = 0$ , par intégration du système d'équations (3.21).

La deuxième équation de (3.21) s'intègre facilement en notant que :

$$(3.22) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\ln(\tan(x))] = \frac{1}{\sin 2x}.$$

De même, après avoir reporté la solution obtenue pour la deuxième équation de (3.21) dans la première, celle-ci s'intègre à l'aide de (3.22). Finalement la solution de (3.21) se met sous la forme :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan(\varphi - \lambda) = \tan(\varphi_0 - \lambda) e^{A_{\lambda}} \\ \tan \theta = \tan \theta_0 \left( \frac{1 + \tan^2(\varphi_0 - \lambda) e^{2A_{\lambda}}}{1 + \tan^2(\varphi_0 - \lambda)} \right)^{1/2} e^{-\frac{3(A_1 + A_2) + A_{\lambda}}{2}} \end{array} \right. .$$

où les paramètres  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_{\lambda}$  donnés par :

$$(3.24) \quad A_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \psi \bar{S}_{11} dt, \quad A_2 = \frac{1}{2} \int_0^t \psi \bar{S}_{22} dt \quad \text{et} \quad A_{\lambda} = \frac{1}{2} \int_0^t \psi \bar{S}_{\lambda} dt,$$

sont homogènes à des déformations et intègrent l'histoire des contraintes entre 0 et  $t$ .

L'équation différentielle (3.17) peut se mettre sous la forme :

$$(3.25) \quad \frac{d f \sin \theta}{dt} = -f \sin \theta \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} \right),$$

avec, d'après (3.21),

$$(3.26) \quad \begin{cases} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 2\dot{\theta} \cot 2\theta = \frac{d}{dt} [\ln(\sin 2\theta)] \\ \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} = 2\dot{\varphi} \cot 2(\varphi - \lambda) = \frac{d}{dt} [\ln(\sin 2(\varphi - \lambda))] \end{cases}.$$

L'intégration de (3.25), en tenant compte des relations (3.26) et de la condition initiale  $f(\theta_0, \varphi_0, 0) = 1$  (**h6**), conduit à l'expression de l'ODF suivante :

$$f(\theta, \varphi, t) \sin \theta = \frac{\sin \theta_0 \sin 2\theta_0 \sin 2(\varphi_0 - \lambda)}{\sin 2\theta \sin 2(\varphi - \lambda)}.$$

En remplaçant  $\theta_0$  et  $\varphi_0$  dans l'équation précédente par leurs expressions en fonction de  $\theta$ ,  $\varphi$  et  $t$  tirées de (3.23), nous obtenons :

$$(3.27) \quad f(\theta, \varphi, t) = \frac{e^{3(A_1+A_2)}}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta (\cos^2(\varphi - \lambda) + e^{-2A_\lambda} \sin^2(\varphi - \lambda)) e^{3(A_1+A_2)+A_\lambda})^{3/2}}$$

L'ODF (3.27) n'est fonction que de l'histoire des contraintes de 0 à  $t$  et de la fluidité  $\psi$  dans le plan de base du monocristal. La Figure (3.3) donne une représentation en projection de Schmidt des fabriques obtenues, à différentes dates  $t$ , pour des conditions de contraintes constantes  $\bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = \bar{S}_{12}$ .

L'ODF (3.27) vérifie les relations de symétrie suivantes :

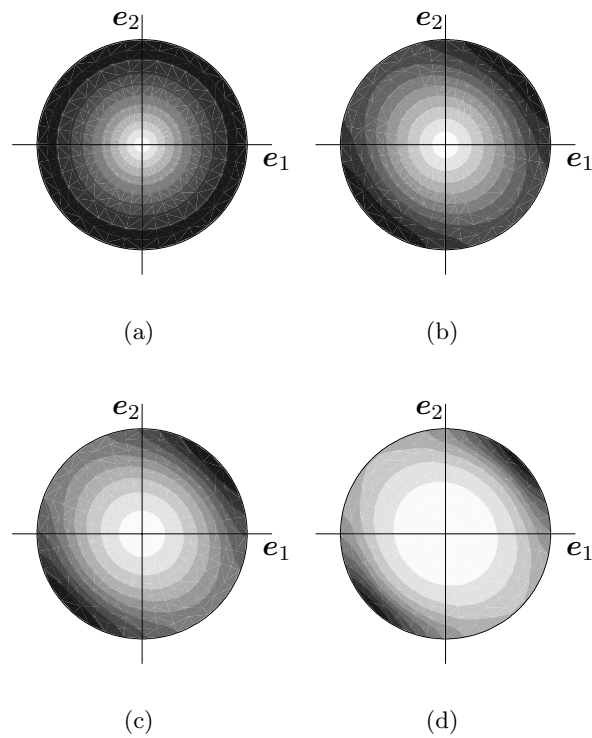
$$(3.28) \quad f(\theta, \varphi, t) = f(\theta, \pi + \varphi, t) = f(\theta, \pi + 2\lambda - \varphi, t) = f(\theta, 2\lambda - \varphi, t).$$

Ces relations démontrent l'existence des deux plans de symétrie ( ${}^o\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ ) et ( ${}^o\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ), où les vecteurs de la base  $\{{}^o\mathbf{R}\}$  sont tels que  ${}^o\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$  et  $\lambda$  est l'angle entre  $\mathbf{e}_1$  et  ${}^o\mathbf{e}_1$ . L'ODF donnée par (3.27) décrit donc un matériau dont la fabrique est orthotrope et dont le troisième plan de symétrie<sup>2</sup> est le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

L'hypothèse **h7** ( $\lambda$  constant) entraîne que le repère d'orthotropie reste confondu avec celui des contraintes principales au cours du chargement, et que, par conséquent, les symétries du matériau sont conservées, ce qui permet de conserver la même forme de fonction pour décrire l'évolution de la fabrique.

Il ne semble pas possible d'obtenir une forme plus générale pouvant décrire une fabrique avec un seul plan de symétrie par exemple. De même, lorsque le comportement du grain n'est pas linéaire, l'intégration de (3.17) n'aboutit pas, car les relations reliant  $\theta$  et  $\varphi$  à  $\theta_0$  et  $\varphi_0$  ne s'inversent plus, même pour des conditions de chargement plus simples.

<sup>2</sup>L'existence de deux plans de symétrie implique celle d'un troisième plan perpendiculaire aux deux premiers.



**Fig. 3.3 :** Représentation en projection de Schmidt des fabriques obtenues avec l'ODF analytique pour un état de contrainte  $\bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = \bar{S}_{12} = -0.01 \text{ MPa}$  constant et  $\psi = 0.1 \text{ MPa}^{-1} \text{ a}^{-1}$  à différentes dates (a)  $t = 0 \text{ a}$ , (b)  $t = 100 \text{ a}$ , (c)  $t = 200 \text{ a}$  et (d)  $t = 400 \text{ a}$ . Du plus foncé au plus clair sont représentés 10 intervalles réguliers entre la valeur maximum de  $f(\theta, \varphi) \sin \theta$  et 0. Cette valeur maximum est différente à chaque date  $t$ .

Nous avons vérifié que, pour une fabrique initiale isotrope, la vitesse de formation des fabriques, et la façon dont les axes- $c$  sont distribués relativement à la direction de compression-traction, sont indépendantes de la direction de compression-traction.

Selon Lliboutry (1993), la valeur de  $\psi$  dépend de la fabrique du polycristal parce que la densité des dislocations mobiles est contrôlée par la migration des joints de grains, celle-ci étant d'autant plus aisée que le nombre de sites en coïncidence augmente. Ce dernier étant fonction croissante de la concentration de la fabrique, la valeur de  $\psi$  devrait augmenter lorsque la fabrique se concentre. Les expressions (3.24) montrent que la valeur de  $\psi$  peut évoluer en fonction de la fabrique sans que la forme (3.27) pour l'ODF soit modifiée. Lorsque la formation des fabriques résulte uniquement de la déformation des grains (*i.e.*  $\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{0}$ ), si la vitesse de déformation des grains augmente (*i.e.*  $\psi$  augmente) quand la fabrique se concentre, alors la formation de la fabrique est accélérée. A l'échelle d'un écoulement, l'influence d'une augmentation de  $\psi$  est beaucoup plus difficile à appréhender, puisque la formation de la fabrique est gouvernée à la fois par la vitesse de déformation des grains et la vitesse de rotation macroscopique. Etant donné que l'hypothèse de contraintes homogènes surestime déjà les vitesses de rotation des grains, nous supposons dans la suite que  $\psi$  ne dépend pas de la fabrique et reste donc constant au cours de la déformation.

### 3.4.3 Compression-traction selon $e_3$

Dans le cas particulier où  $\bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = -\bar{S}_{33}/2$  et  $\bar{S}_{12} = 0$ , et par conséquent  $A_1 = A_2$ ,  $A_\lambda = 0$  et  $\lambda = 0$ , l'ODF (3.27) se met alors sous la forme simplifiée :

$$(3.29) \quad f(\theta, t) = \frac{e^{-A_3}}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta e^{-A_3})^{3/2}},$$

où

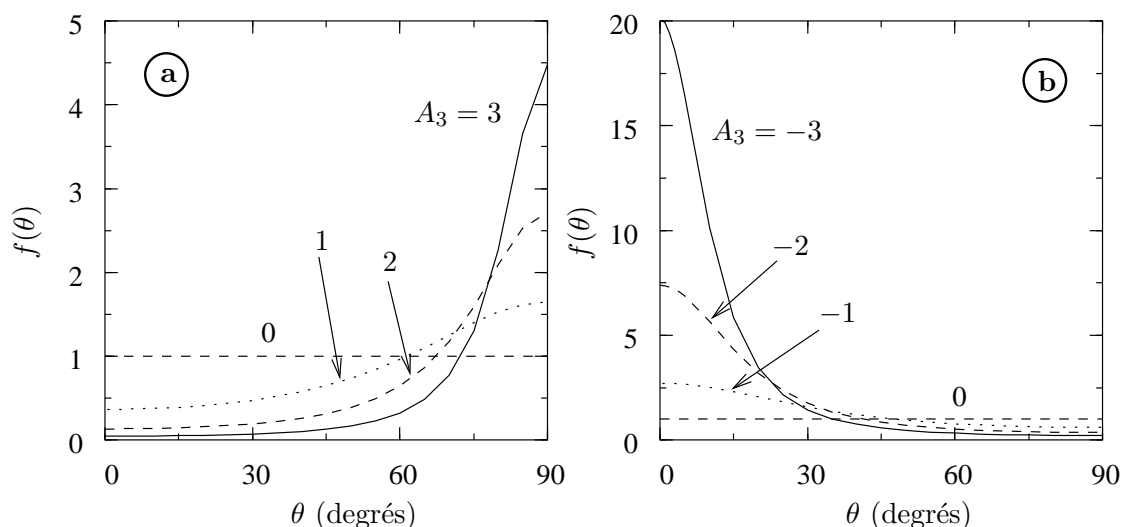
$$(3.30) \quad A_3 = -3(A_1 + A_2) = \frac{3}{2} \int_0^t \psi \bar{S}_{33} dt.$$

La symétrie du chargement ( $\bar{S}_{11} = \bar{S}_{22}$ ) conduit à une ODF uniquement fonction de  $\theta$  et donc à une fabrique orthotrope de révolution autour de l'axe de compression-traction.

Sur la Figure 3.4 sont représentées les variations de l'ODF analytique (3.29) en fonction de  $\theta$  en compression et en traction pour différentes valeurs de l'histoire des contraintes  $A_3$ . Les figures de pôles correspondantes sont tracées sur la Figure 3.5.

En traction, les axes- $c$  s'orientent de façon homogène selon  $\varphi$  en  $\theta = \pi/2$ . En compression, tous les axes- $c$  s'alignent selon l'axe de compression  $e_3$ . Puisque le nombre relatif de grains ayant l'orientation  $(\theta, \varphi)$  est  $f(\theta, \varphi) \sin \theta$ , en  $\theta = 0$  le nombre relatif de grains est nul. Ceci explique que pour une compression le centre des diagrammes ( $\theta = 0$ ) soit blanc et non pas noir. Pour apprécier la concentration des fabriques de compression il faut uniquement observer le rayon du disque le plus sombre : plus ce rayon est petit plus la fabrique est concentrée.

L'expression (3.27) conduit aux mêmes formes de fabriques déjà obtenues par des simulations numériques (Van der Veen et Whillans, 1994; Castelnau *et al.*, 1996b).



**Fig. 3.4 :** ODF analytique fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$  : (a) en traction uniaxiale, (b) en compression uniaxiale.

Notons que d'un point de vue qualitatif, ces résultats ont déjà été donnés au paragraphe 3.3, uniquement à partir des expressions (3.9) donnant les vitesses de rotation des grains.

#### 3.4.4 Cisaillement pur

Pour un cisaillement pur, il vient  $\bar{S}_\lambda = 2\bar{S}_{12}$ ,  $A_1 = A_2 = 0$  et  $\lambda = \pi/4$ . L'expression (3.27) de l'ODF se met alors sous la forme simplifiée :

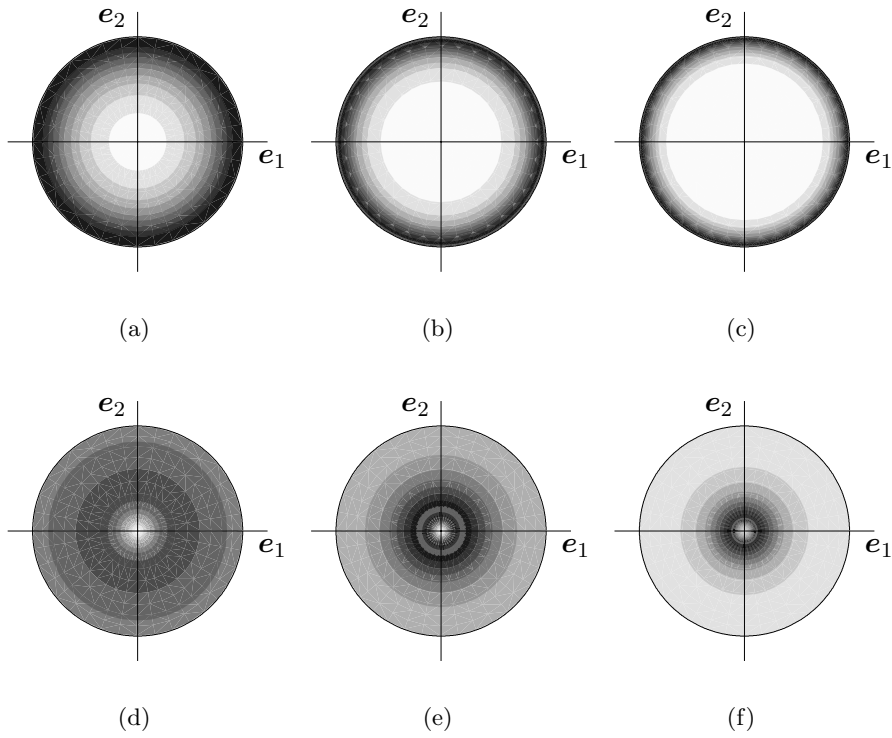
$$(3.31) \quad f(\theta, \varphi, t) = \frac{1}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta (\cos^2(\varphi - \pi/4) e^{A_{12}} + \sin^2(\varphi - \pi/4) e^{-A_{12}}))^{3/2}},$$

où

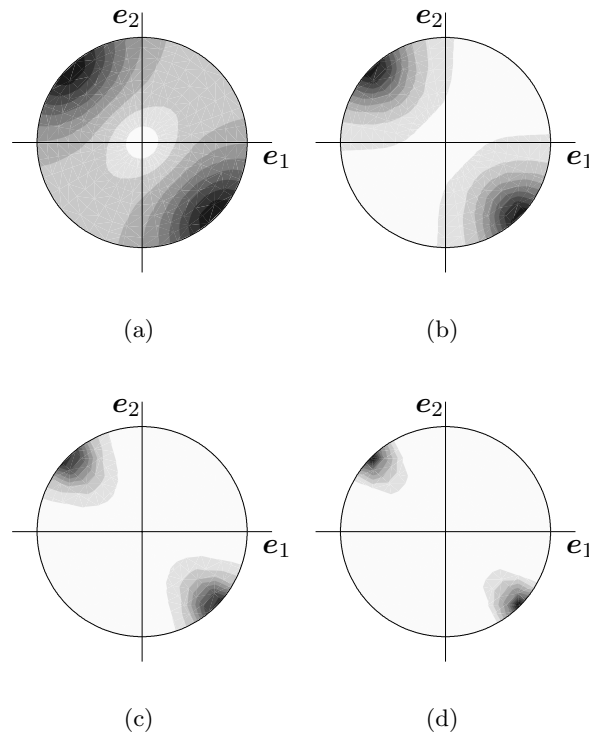
$$(3.32) \quad A_{12} = \int_0^t \psi \bar{S}_{12} dt.$$

Si  $\bar{S}_{12} > 0$ , les axes- $c$  s'orientent en  $(\theta = \pi/2, \varphi = 3\pi/4)$ , soit à  $45^\circ$  de la normale à la direction de cisaillement. Sur la Figure 3.6 sont représentées les figures de pôles correspondant à l'ODF analytique (3.31) pour différentes valeurs du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_{12}$ .

Un état de contrainte de cisaillement pur est équivalent à la superposition d'une compression et d'une traction dans le repère des contraintes principales. Les figures de pôles obtenues montrent que les fabriques de cisaillement pur sont proches des fabriques de compression, puisque tout les grains s'orientent selon la direction de compression maximum (ici à  $3\pi/4$  de  $e_1$ ). Néanmoins, les fabriques de cisaillement pur ne présentent pas la symétrie de révolution des fabriques de compression, et leur concentration, pour une même valeur de l'histoire des contraintes, est plus faible.



**Fig. 3.5 :** Représentation en projection de Schmidt des fabriques obtenues avec l'ODF analytique pour différentes valeurs du paramètre de l'histoire des contraintes, en traction uniaxiale (a)  $A_3 = 1.0$ , (b)  $A_3 = 2.0$ , (c)  $A_3 = 3.0$  et en compression uniaxiale (d)  $A_3 = -1.0$ , (e)  $A_3 = -2.0$ , (f)  $A_3 = -3.0$ . Du plus foncé au plus clair sont représentés 10 intervalles réguliers entre la valeur maximum de  $f(\theta, \varphi) \sin \theta$  et 0. Cette valeur maximum est différente pour chaque valeur du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$ .



**Fig. 3.6 :** Représentation en projection de Schmidt des fabriques obtenues avec l'ODF analytique en cisaillement pur pour différentes valeurs du paramètre de l'histoire des contraintes (a)  $A_{12} = 0.5$ , (b)  $A_{12} = 1.0$ , (c)  $A_{12} = 1.5$  et (d)  $A_{12} = 2.0$ . Du plus foncé au plus clair sont représentés 10 intervalles réguliers entre la valeur maximum de  $f(\theta, \varphi) \sin \theta$  et 0. Cette valeur maximum est différente pour chaque valeur du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_{12}$ .

### 3.4.5 Adaptation au modèle de Taylor

Il est possible de transposer les résultats précédents pour le modèle de Taylor en remarquant que les équations (3.8) restent valables pour ce modèle. En effet, la seule hypothèse faite pour passer de l'équation (3.7) (équation générale à tous les modèles) à (3.8) est  $W = \bar{W}$ , et cette hypothèse est compatible avec le modèle de Taylor.

Par conséquent, en notant que le changement de base effectué sur  ${}^g\bar{S}_{13}$  et  ${}^g\bar{S}_{23}$  pour passer de (3.8) à (3.9) est formellement le même que celui que nous ferions pour  ${}^gD_{13} = {}^g\bar{D}_{13}$  et  ${}^gD_{23} = {}^g\bar{D}_{23}$  avec le modèle de Taylor, les équations (3.9) restent valables pour le modèle de Taylor en remplaçant  $\psi\bar{S}_{ij}/2$  par  $\bar{D}_{ij}$ .

De même, en appliquant l'hypothèse **h7** au tenseur des vitesses de déformations, et non plus au tenseur des contraintes<sup>3</sup> nous obtenons pour l'ODF l'expression analytique (3.27) où les  $\psi\bar{S}_{ij}/2$  sont remplacés par  $\bar{D}_{ij}$  dans les paramètres  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_\lambda$ .

Par exemple, pour une compression-traction  $\bar{D}_{33}$ , l'ODF (3.29) obtenue avec le modèle à contraintes homogènes se réécrit dans le cas du modèle de Taylor sous la forme suivante :

$$(3.33) \quad f(\theta, t) = \frac{e^{-3 \int_0^t \bar{D}_{33} dt}}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta e^{-3 \int_0^t \bar{D}_{33} dt})^{3/2}}.$$

Notons enfin que, contrairement au cas du modèle à contraintes homogènes, il existe une solution analytique de l'ODF en cisaillement simple pour le modèle de Taylor. Cette solution est donnée en **Annexe E**.

## 3.5 ODF paramétrée

### 3.5.1 Fabrique orthotrope

Lorsque le matériau est linéaire et que l'histoire des contraintes est telle que les symétries d'orthotropie du matériau sont conservées, nous disposons de la forme analytique (3.27) pour décrire la fabrique de façon directe.

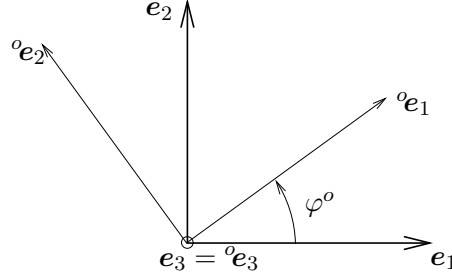
Malheureusement, l'histoire des contraintes subies par un polycristal de glace, au cours de son déplacement dans la calotte polaire, a très peu de chances de vérifier l'hypothèse **h7**, et par ailleurs les vitesses de rotation macroscopiques ne sont sûrement pas nulles. Au cours de son déplacement dans la calotte polaire, le polycristal est d'abord comprimé verticalement dans une zone proche de la surface, puis progressivement la contrainte de cisaillement augmente. Par conséquent, la position du repère des contraintes principales par rapport au repère de référence n'est pas fixe ( $\lambda$  varie au cours du temps).

Néanmoins, nous pouvons faire l'hypothèse<sup>4</sup> que les fabriques formées au sein des calottes polaires peuvent être approchées par des fabriques orthotropes. Pour cette raison, à partir de la forme analytique (3.27), nous proposons l'ODF paramétrée suivante :

<sup>3</sup>  $\lambda$  étant alors l'angle qui définit la position du repère principal des vitesses de déformations par rapport au repère principal.

<sup>4</sup> Hypothèse que nous vérifierons au **Chapitre 7**.





**Fig. 3.7** : Définition de  $\varphi^o$  donnant la position du repère d'orthotropie de la fabrique  $\{^oR\}$  par rapport au repère de référence  $\{R\}$ .

$$(3.34) \quad f(\theta, \varphi, k_1, k_2, k_3, \varphi^o) = \frac{1}{[\sin^2 \theta (k_1^2 \cos^2(\varphi - \varphi^o) + k_2^2 \sin^2(\varphi - \varphi^o)) + k_3^2 \cos^2 \theta]^{3/2}}.$$

En remplaçant  $f(\theta, \varphi)$  dans l'équation de la conservation du nombre total de grains (1.8) par son expression paramétrée (3.34), nous obtenons, après intégration selon  $\theta$  puis  $\varphi$ , la relation suivante entre les trois paramètres  $k_i$  :

$$(3.35) \quad k_1 k_2 k_3 = 1$$

Si nous imposons aux paramètres  $k_i$  de vérifier (3.35), alors l'équation de la conservation du nombre de grain (1.8) est implicitement vérifiée et l'ODF paramétrée (3.34) ne dépend plus que de trois paramètres indépendants : deux paramètres  $k_i$  qui caractérisent la concentration de la fabrique et un paramètre d'orientation  $\varphi^o$ . L'ODF (3.34) permet de décrire une fabrique orthotrope, dont le repère d'orthotropie  $\{^oR\}$  est tourné de  $\varphi^o$  par rapport au repère de référence autour de  $e_3 = ^oe_3$  comme défini sur la Figure 3.7.

Lorsque  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  la fabrique est isotrope.

Il serait possible en ajoutant un deuxième paramètre d'orientation d'introduire un déphasage selon  $\theta$ . Comme nous allons étudier uniquement des écoulements plans, nous ne tiendrons pas compte de ce déphasage.

Nous présentons à la fin de ce chapitre deux méthodes numériques pour calculer l'évolution des paramètres  $k_i$  et  $\varphi^o$  (*i.e.* de la fabrique) au cours du chargement.

### 3.5.2 Forme des fabriques en fonction de la valeur des paramètres

Lorsque les hypothèses **h4** à **h7** sont vérifiées (*cf.* §3.4.1), la comparaison des ODF analytique (3.27) et paramétrée (3.34) conduit aux relations suivantes :

$$(3.36) \quad \begin{cases} k_1 = e^{(A_1 + A_2 + A_\lambda)/2} \\ k_2 = e^{(A_1 + A_2 - A_\lambda)/2} \\ k_3 = e^{-(A_1 + A_2)} \\ \varphi^o = \lambda \end{cases},$$

où  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_\lambda$  sont les paramètres de l'histoire des contraintes définis par les relations (3.24) et  $\lambda$  définit la position du repère des contraintes principales par rapport au repère de référence  $\{\mathbf{R}\}$  (*cf.* les relations (3.19)).

Dans le cas général, en remplaçant le système de coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$  par le système de coordonnées cartésiennes  $({}^o x_i)$  liées au repère d'orthotropie  $\{{}^o \mathbf{R}\}$ , soit

$$(3.37) \quad \begin{cases} {}^o x_1 = \sin \theta \cos(\varphi - \varphi^o) \\ {}^o x_2 = \sin \theta \sin(\varphi - \varphi^o) \\ {}^o x_3 = \cos \theta \end{cases} ,$$

l'ODF paramétrée (3.34) se réécrit sous la forme :

$$(3.38) \quad f({}^o x_i, k_i) = \frac{1}{(k_1^2 {}^o x_1^2 + k_2^2 {}^o x_2^2 + k_3^2 {}^o x_3^2)^{3/2}},$$

Les différentes formes de fabriques obtenues en fonction de la valeur des paramètres  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  apparaissent alors clairement.

Si  $k_1 = k_2$  (respectivement  $k_1 = k_3$  et  $k_2 = k_3$ ), la fabrique est orthotrope de révolution par rapport à l'axe  $\mathbf{e}_3 = {}^o \mathbf{e}_3$  (respectivement  ${}^o \mathbf{e}_2$  et  ${}^o \mathbf{e}_1$ ).

Le maximum de l'ODF paramétrée (3.38) est toujours obtenu à la limite du domaine de définition des  ${}^o x_i$  (la demi-sphère définie par  ${}^o x_1^2 + {}^o x_2^2 + {}^o x_3^2 = 1$  et  ${}^o x_3 > 0$ ), soit en  ${}^o x_m = \pm 1$  si  $k_m$  est le paramètre le plus petit, et ce maximum vaut  $k_m^{-3}$ . Lorsque les deux paramètres  $k_m$  et  $k_n$  ( $m \neq n$ ) sont égaux et inférieurs au troisième  $k_l$  ( $l \neq m \neq n$ ), l'ODF est maximum sur le cercle défini par  ${}^o x_m^2 + {}^o x_n^2 = 1$  et  ${}^o x_l = 0$ .

Par conséquent, nous pouvons distinguer six cas limites de fabriques orthotropes :

$$\begin{array}{ll} k_1 \ll 1 < k_2, k_3 & \text{Un maximum selon } {}^o \mathbf{e}_1, \\ k_2 \ll 1 < k_1, k_3 & \text{Un maximum selon } {}^o \mathbf{e}_2, \\ k_3 \ll 1 < k_1, k_2 & \text{Un maximum selon } {}^o \mathbf{e}_3, \\ k_1 = k_2 \ll 1 < k_3 & \text{Couronne dans le plan } ({}^o \mathbf{e}_1, {}^o \mathbf{e}_2), \\ k_1 = k_3 \ll 1 < k_2 & \text{Couronne dans le plan } ({}^o \mathbf{e}_1, {}^o \mathbf{e}_3), \\ k_2 = k_3 \ll 1 < k_1 & \text{Couronne dans le plan } ({}^o \mathbf{e}_2, {}^o \mathbf{e}_3). \end{array}$$

### 3.5.3 Comparaison avec l'ODF paramétrée de Lliboutry (1993)

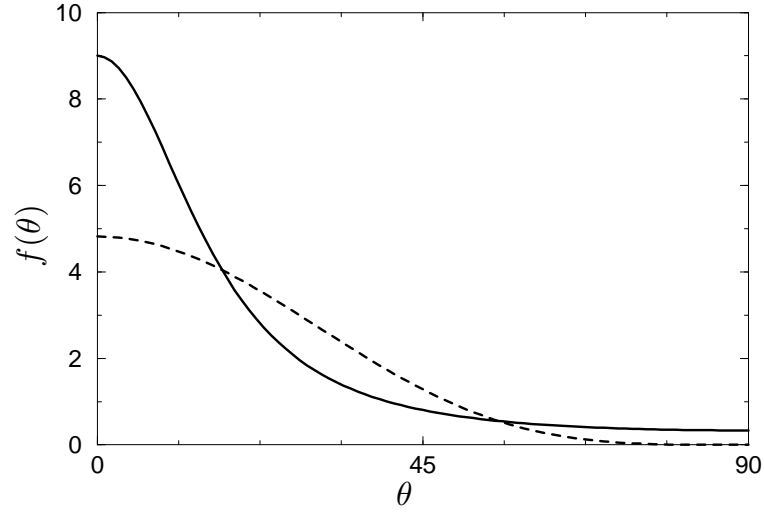
Lliboutry (1993) propose le paramétrage suivant de l'ODF, dans le cas particulier où la fabrique présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$  :

$$(3.39) \quad f(\theta) = \nu \cos^{\nu-1} \theta \quad , \quad \text{avec} \quad \nu = -\frac{\ln 2}{\ln(\cos \theta_{1/2})}, \quad \theta_{1/2} \in [0, \pi/2].$$

La fabrique est alors modélisée par un seul paramètre  $\theta_{1/2}$  qui représente l'angle pour lequel la moitié des grains est comprise dans l'intervalle  $[0, \theta_{1/2}]$ , soit tel que :

$$(3.40) \quad \int_0^{\theta_{1/2}} f(\theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2}.$$

La valeur de  $\theta_{1/2}$  caractérise la forme de la fabrique. Si  $\theta_{1/2} < 60^\circ$  la fabrique correspond à une fabrique de compression selon l'axe  $\mathbf{e}_3$  et de traction si  $\theta_{1/2} > 60^\circ$ .



**Fig. 3.8 :** Comparaison de l'ODF proposée par Lliboutry (1993) (tirets) et de l'ODF paramétrée (3.34) (trait plein), pour  $\theta_{1/2} = 30^\circ$ .

L'approche proposée par Lliboutry (1993) ne permet pas de prédire l'évolution de la fabrique pour un chargement donné, mais seulement de modéliser la fabrique à partir de l'observation d'un échantillon. En pratique, la valeur de  $\theta_{1/2}$  correspondant à une fabrique donnée est déterminée d'après l'observation de lames minces en lumière polarisée (Thorsteinsson *et al.*, 1997). Mangeney (1996) a montré que cette approximation à un seul paramètre, dans le cas des fabriques orthotropes de révolution de GRIP (Groenland), donne une bonne représentation de la fabrique réelle du polycristal.

En reportant l'ODF paramétrée (3.34) où  $k_1 = k_2$  (orthotropie de révolution autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$ ) dans (3.40), et en tenant compte de (3.35), nous obtenons, après intégration, les relations liant les paramètres  $k_i$  à  $\theta_{1/2}$  comme :

$$(3.41) \quad \left| \begin{array}{l} k_3 = \left( \frac{\tan^2 \theta_{1/2}}{3} \right)^{1/3} \\ k_1 = k_2 = k_3^{-1/2} \end{array} \right. .$$

L'ODF proposée par Lliboutry (1993) a une limite infinie en  $\theta = \pi/2$  lorsque  $\nu \leq 1$ , soit pour  $\theta_{1/2} > 60^\circ$ , et ne semble donc pas adaptée pour décrire les fabriques de traction. La Figure 3.8 compare la forme des deux ODF pour une même valeur de  $\theta_{1/2} = 30^\circ$  (compression). Les distributions des orientations sont différentes, en particulier l'ODF proposée par Lliboutry (1993) donne une fabrique moins concentrée que l'ODF paramétrée (3.34) dérivée du calcul analytique.

### 3.6 Méthodes numériques appliquées au calcul de l'évolution de la fabrique

Dans cette partie, nous présentons les méthodes numériques mises en œuvre pour résoudre l'équation de la conservation du nombre de grains (3.17) pendant un *petit* incrément de temps  $dt$  et pour des vitesses de rotation des grains décrites par les équations (3.8). Nous supposons encore que le polycristal de glace est isolé et que l'évolution de la fabrique est uniquement fonction des contraintes appliquées et des vitesses de rotation macroscopiques imposées depuis le début du chargement. Nous présentons ici quatre méthodes de résolution de l'équation (3.17) :

- la première méthode consiste à décrire la fabrique en supposant le polycristal constitué de  $N_g$  grains discrets,
- la deuxième méthode traite les équations en discrétisant l'ODF sur un nombre fini de petits éléments surfaciques de la sphère des orientations,
- les deux dernières méthodes consistent à résoudre les équations en utilisant l'ODF paramétrée sous la forme (3.34).

Pour les quatre méthodes, le calcul de la nouvelle fabrique à  $t + dt$  est fait de façon implicite par une méthode itérative, pour tenir compte des changements de propriétés du matériau dus à l'évolution de sa fabrique pendant  $dt$ . Nous ne présentons ici que les particularités propres à chacune des quatre méthodes, en ne traitant que le calcul direct de l'évolution pendant un incrément de temps  $dt$ . Pour les quatre méthodes, l'incrément de temps  $dt$  est contrôlé de façon que la rotation maximum des grains reste inférieure à  $1^\circ$ .

#### 3.6.1 Grains discrets

Lorsque la fabrique est décrite par un nombre fini de grains  $N_g$ , constant au cours de la déformation, l'équation de la conservation du nombre de grains (3.17) est implicitement vérifiée. Un grain est défini par son orientation  $(\theta, \varphi)$  à l'instant  $t$ . Pendant un petit incrément de temps  $dt$ , l'évolution de son orientation est :

$$(3.42) \quad \begin{cases} \theta(t + dt) = \theta(t) + \dot{\theta}(t) dt \\ \varphi(t + dt) = \varphi(t) + \dot{\varphi}(t) dt \end{cases} ,$$

où  $\dot{\theta}(t)$  et  $\dot{\varphi}(t)$  sont définies par (3.8) en fonction de la valeur des contraintes à l'instant  $t$ .

C'est la méthode classique utilisée lorsque la fabrique est décrite par un nombre fini de grains (Van der Veen et Whillans, 1994; Castelnau, 1996)

#### 3.6.2 ODF discrétisée

L'ODF discrétisée est définie par ses valeurs aux centres de petits éléments surfaciques de la demi-sphère des orientations. Dans la pratique, la demi-sphère est divisée en  $4N_d^2$  intervalles surfaciques, ou "boîtes", de cotés  $\Delta\theta = \Delta\varphi = \Delta = \pi/(2N_d)$ . Pendant un incrément de temps  $dt$ , l'équation de la conservation du nombre de grains (3.17) est résolue numériquement, en écrivant que la variation du nombre relatif de grains dans chaque boîte est égale à la différence des nombres de grains entrants et de grains sortants.

Dans la pratique, si  $N_d = 90$  le nombre d'éléments surfaciques est 32 400. Cette méthode ne présente donc aucun avantage pour la diminution du nombre d'inconnues définissant la fabrique. Nous l'utiliserons cependant au **Chapitre 7** lors de la comparaison des différentes méthodes et pour valider les calculs effectués avec l'ODF paramétrée, lorsque les conditions de chargement ne conservent pas l'orthotropie de la fabrique.

### 3.6.3 ODF paramétrée

Si la fabrique est décrite à l'aide de l'ODF paramétrée (3.34), alors elle est forcément orthotrope. Lorsque l'histoire des contraintes appliquées au polycristal vérifie les hypothèses **h4** à **h7** (cf. §3.4.1), les paramètres de l'ODF sont directement déterminés par les égalités (3.36). Lorsque l'histoire des contraintes ne vérifie pas ces hypothèses, la fabrique créée n'est, *a priori*, pas orthotrope. L'ODF paramétrée est alors ajustée *au mieux* pour décrire la nouvelle fabrique, la conséquence étant que plus la fabrique réelle est éloignée d'une fabrique orthotrope, plus la description donnée par l'ODF paramétrée est mauvaise. Cette méthode n'est donc bien adaptée que si les fabriques restent proches d'une fabrique orthotrope. Nous montrerons au **Chapitre 7** que cette condition est bien respectée pour les fabriques créées par l'écoulement d'une calotte polaire.

Notons que, contrairement aux deux premières méthodes, les deux méthodes d'évolution de l'ODF paramétrée que nous présentons ici s'appliquent uniquement au cas particulier des écoulements dont le champ de vitesses est symétrique par rapport au plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^5$ . En adoptant les mêmes notations que pour le passage de (3.20) à (3.21), les équations (3.9) donnant les vitesses de rotation des grains  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  se réduisent alors à :

$$(3.43) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = -\frac{\psi}{8} \sin 2\theta [3(\bar{S}_{11} + \bar{S}_{22}) + \bar{S}_{\lambda} \cos 2(\varphi - \lambda)] \\ \dot{\varphi} = \frac{\psi}{4} \bar{S}_{\lambda} \sin 2(\varphi - \lambda) - \bar{W}_{12} \end{cases},$$

où  $\bar{S}_{\lambda}$  est défini par (3.19) et  $\lambda$  définit l'angle entre le repère des contraintes principales par rapport au repère de référence  $\{\mathbf{R}\}$  à l'instant  $t$ .

Pour déterminer la variation des paramètres  $k_i$  et  $\varphi^o$  pendant un incrément de temps  $dt$ , nous proposons deux méthodes :

#### 3.6.3.1 Méthode des moindres carrés

L'équation de la conservation du nombre total de grains (3.17) est résolue par la méthode des moindres carrés. Nous cherchons quelles sont les valeurs des incréments des paramètres  $dk_i$  et  $d\varphi^o$  qui vérifient *au mieux* l'équation (3.17). En posant

$$\frac{\partial f \sin \theta}{\partial t} = \frac{\partial f \sin \theta}{\partial k_i} \dot{k}_i + \frac{\partial f \sin \theta}{\partial \varphi^o} \dot{\varphi}^o,$$

avec

$$(3.44) \quad \begin{cases} k_i(t + dt) = k_i(t) + \dot{k}_i dt \\ \varphi^o(t + dt) = \varphi^o(t) + \dot{\varphi}^o dt \end{cases},$$

<sup>5</sup>Sinon, il faudrait prendre en compte un cinquième paramètre  $\theta^o$  pour repérer complètement le repère d'orthotropie du matériau par rapport à  $\{\mathbf{R}\}$ .

et

$$(3.45) \quad J(\theta, \varphi, k_j, \varphi^o) = \frac{\partial f \sin \theta}{\partial k_j} \dot{k}_j + \frac{\partial f \sin \theta}{\partial \varphi^o} \dot{\varphi}^o + \frac{\partial \dot{\theta} f \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\varphi} f \sin \theta}{\partial \varphi},$$

l'équation (3.17) devient :

$$(3.46) \quad J(\theta, \varphi, k_j, \varphi^o) = 0.$$

Avec ces notations, les paramètres à l'instant  $t + dt$  sont déterminés par la résolution du système aux moindres carrés  $3 \times 3$  suivant :

$$(3.47) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial k_i} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} J(\theta, \varphi, k_j, \varphi^o)^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 0, & i = 1, 2 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi^o} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} J(\theta, \varphi, k_j, \varphi^o)^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 0 \end{cases},$$

où  $k_3$  est remplacé par  $(k_1 k_2)^{-1}$  d'après (3.35), et les vitesses de rotation des grains  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  sont données par (3.43) en fonction des contraintes appliquées et des vitesses de rotation macroscopiques.

Les intégrales selon  $\theta$  du système (3.47) sont calculées analytiquement (nous ne les développons pas ici) et par conséquent seule l'intégration selon  $\varphi$  est numérique. En poussant les calculs analytiques au maximum, nous diminuons de façon conséquente le temps nécessaire au remplissage de la matrice  $3 \times 3$  des moindres carrés. Néanmoins cette méthode conduit à intégrer numériquement des fonctions à pic lorsque la fabrique se concentre (*i.e.* lorsqu'un des paramètres  $k_i$  est petit devant les autres). Ces difficultés numériques sont très coûteuses en temps de calcul, et pour cette raison nous proposons une deuxième méthode plus directe.

### 3.6.3.2 Méthode directe

La méthode directe sépare le calcul des paramètres de concentration  $k_i$  et du paramètre d'orientation  $\varphi^o$  de la fabrique. Les  $k_i$  sont déterminés en supposant que la rotation du repère des contraintes principales n'a pas d'incidence sur le calcul de la concentration de la fabrique, *i.e.* sur la valeur des  $k_i$ . Ensuite, la variation du paramètre  $\varphi^o$  est déterminé comme la moyenne des vitesses de rotation  $\dot{\varphi}$  de tous les grains pendant  $dt$ .

La variation des paramètres  $k_i$  pendant  $dt$  est obtenue par dérivation des relations (3.36), soit :

$$(3.48) \quad \begin{cases} dk_1 = \frac{1}{2} k_1 (dA_1 + dA_2 + dA_\lambda) \\ dk_2 = \frac{1}{2} k_2 (dA_1 + dA_2 - dA_\lambda) \\ dk_3 = -k_3 (dA_1 + dA_2) \end{cases}.$$

En calculant les incréments des paramètres de l'histoire des contraintes à partir de la

définition des  $A_i$  donnée par (3.24), il vient :

$$(3.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} dk_1 = \frac{\psi}{4} (\bar{S}_{11} + \bar{S}_{22} + \bar{S}_\lambda) k_1 dt \\ dk_2 = \frac{\psi}{4} (\bar{S}_{11} + \bar{S}_{22} - \bar{S}_\lambda) k_2 dt \quad , \\ dk_3 = -\frac{\psi}{2} (\bar{S}_{11} + \bar{S}_{22}) k_3 dt \end{array} \right.$$

où les  $\bar{S}_{ij}$  sont les contraintes déviatoires appliquées à l'instant  $t$ , et  $\bar{S}_\lambda$  est définie par (3.19).

Ensuite, les vitesses de rotation macroscopiques n'étant pas nulles et le repère d'orthotropie ne coïncidant pas avec le repère des contraintes principales (*i.e.*  $\varphi^o$  et  $\lambda$  ne sont pas égaux), l'évolution du paramètre d'orientation  $\varphi^o$  est déterminé comme étant la moyenne des rotations  $\dot{\varphi}$  de tous les grains pendant  $dt$ , soit :

$$(3.50) \quad d\varphi^o = \langle \dot{\varphi} \rangle dt,$$

où  $\langle \rangle$  est définie par (1.10) et  $\dot{\varphi}$  est donnée par (3.43). En introduisant  $\varphi^o$  dans la deuxième relation de (3.43), et en écrivant  $\varphi - \lambda = (\varphi - \varphi^o) + (\varphi^o - \lambda)$ , il vient :

$$(3.51) \quad d\varphi^o = -\bar{W}_{12} + \frac{\psi}{4} \bar{S}_\lambda [ -\sin 2(\lambda - \varphi^o) \langle \cos 2(\varphi - \varphi^o) \rangle + \cos 2(\lambda - \varphi^o) \langle \sin 2(\varphi - \varphi^o) \rangle ].$$

En notant que  $\langle \sin 2(\varphi - \varphi^o) \rangle = 0$  il vient :

$$(3.52) \quad d\varphi^o = - \left[ \bar{W}_{12} + \frac{\psi}{4} \bar{S}_\lambda \sin 2(\lambda - \varphi^o) (1 - 2J_{\varphi^o}) \right] dt,$$

où  $J_{\varphi^o}$  est définie par

$$(3.53) \quad J_{\varphi^o} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi + \varphi^o) \sin \theta \sin^2 \varphi d\theta d\varphi.$$

L'intégrale  $J_{\varphi^o}$  s'intègre analytiquement selon  $\theta$  pour donner :

$$(3.54) \quad J_{\varphi^o} = \frac{2}{\pi k_3} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi}{k_1^2 \cos^2 \varphi + k_2^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Cette méthode directe présente l'énorme avantage d'être simple numériquement puisqu'elle ne nécessite le calcul que d'une seule intégrale. Elle est donc extrêmement plus rapide que la méthode des moindres carrés (*cf.* la comparaison des deux méthodes au paragraphe 7.3.1).

Au **Chapitre 7**, nous comparerons les résultats des deux méthodes basées sur l'ODF paramétrée à ceux obtenus avec la méthode de référence utilisant les grains discrets.

### 3.7 Conclusion

Toutes les équations nécessaires au calcul de l'évolution de la fabrique ont été posées. Nous avons montré qu'il était possible de prédire les fabriques obtenues pour des cas de chargement simples, sans connaître la loi de comportement du polycristal anisotrope. Le cas du cisaillement simple sera traité dans le **Chapitre 5**, après avoir donné la loi de comportement du polycristal de glace anisotrope nécessaire à son traitement (**Chapitre 4**).

Enfin nous avons présenté des solutions analytiques pour l'ODF dans le cas d'un polycristal 3D linéaire. La possession de résultats analytiques est toujours intéressante lorsque il s'agit de tester, puis de valider, des méthodes numériques. Mais surtout, à partir de ces résultats analytiques, nous pouvons proposer une forme d'ODF paramétrée, dépendante de seulement trois paramètres et qui permet de décrire de façon concise une fabrique orthotrope. Nous verrons au **Chapitre 7** que les fabriques créées par l'écoulement d'une calotte polaire peuvent être modélisées par l'ODF paramétrée, car elles restent très proches de fabriques orthotropes.



## Chapitre 4

# Modèle de comportement du polycristal de glace anisotrope

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons établir la loi de comportement du polycristal de glace anisotrope à partir de l'hypothèse d'une répartition uniforme des contraintes dans tous les cristaux qui composent le polycristal. Nous nous plaçons en un point fixe  $\boldsymbol{x}$  de l'espace et nous cherchons le comportement *instantané* du polycristal de glace pour une fabrique donnée. Les contraintes et les vitesses de déformation sont définies sur la configuration actuelle du matériau, *i.e.* sur le matériau déformé. Nous formulons donc la loi viscoplastique reliant le tenseur des vitesses de déformation  $\bar{\boldsymbol{D}}$  au tenseur des contraintes de Cauchy  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ .

Comme nous l'avons montré au **Chapitre 1**, il existe des modèles plus sophistiqués (par exemple le modèle auto-cohérent de Castelnau (1996)), mais l'objectif final étant d'incorporer une loi micro-macro anisotrope pour la glace dans un modèle d'écoulement de calotte polaire, le modèle à contraintes homogènes nous a semblé mieux adapté. Lorsque nous aurons résolu les problèmes liés aux calculs d'un écoulement de calotte polaire dont la glace est anisotrope, il sera alors possible d'envisager d'implémenter un modèle de comportement de glace plus sophistiqué (donc beaucoup plus coûteux en temps de calcul).

Dans un premier temps, nous présentons les principales hypothèses du modèle à contraintes homogènes, ainsi que sa formulation générale. Ensuite, les calculs d'homogénéisation de Lliboutry (1993) pour un matériau orthotrope de révolution sont étendus au cas orthotrope. Ces résultats sont comparés aux formulations les plus générales des lois de comportement des matériaux viscoplastiques orthotropes.

### 4.2 Le modèle à contraintes homogènes

#### 4.2.1 Hypothèses

Les hypothèses du modèle de comportement du polycristal de glace anisotrope sont les mêmes que les trois premières hypothèses **h0**, **h1**, **h2** du modèle d'évolution de la fabrique

présenté au **Chapitre 3** (cf. §3.2.1). Par contre, les conséquences de ces hypothèses ne sont pas les mêmes, comme nous allons le voir.

### h0. Contraintes homogènes

La répartition des contraintes dans tous les grains du polycristal est homogène, soit  $\sigma = \bar{\sigma}$ . L'hypothèse de contraintes homogènes a été discutée par Lliboutry (1993) : l'équation de l'équilibre est implicitement vérifiée, par contre la continuité du champ des déformations n'est pas assurée. Au sein des calottes polaires, les valeurs des contraintes déviatoires sont très faibles et ne varient pas brutalement, ce qui permet de supposer une répartition relativement homogène des contraintes dans tous les grains. Par ailleurs, la migration des joints de grains joue aussi un rôle dans l'accommodation des discontinuités intergranulaires de la contrainte.

### h1. Déformation du grain

Le grain est supposé orthotrope de révolution et son comportement est donné par la loi (2.16). La symétrie de révolution du grain permet de repérer celui-ci uniquement à partir de son axe- $c$  et ainsi d'utiliser une fonction scalaire de distribution des orientations des axes- $c$  pour décrire la fabrique du polycristal. L'intérêt principal d'une description mathématique de la fabrique par une ODF réside dans les calculs analytiques qui peuvent être développés.

### h2. Pas de recristallisation

Tous les grains qui composent le polycristal occupent le même volume et le nombre total de grains ne change pas durant l'évolution de la fabrique. Cette hypothèse n'est pas restrictive pour le modèle de comportement puisque la taille et la forme des grains n'ont pas d'influence dans le modèle à contraintes homogènes<sup>1</sup>. Par ailleurs, la fraction volumique des grains et le nombre relatif de grains sont identiques puisque tous les grains ont le même volume.

## 4.2.2 Vitesses de déformation macroscopiques

Seules les contraintes déviatoires entraînent une déformation du grain, et dans la suite, nous travaillerons uniquement avec les contraintes déviatoires, supposées connues et uniformes dans tout le polycristal ( $S = \bar{S}$  d'après l'hypothèse **h0**).

Les vitesses de déformation macroscopiques du polycristal sont définies comme la moyenne des vitesses de déformation de chaque grain :

$$(4.1) \quad \bar{D} = \langle D \rangle .$$

L'hypothèse de contrainte homogène **h0** et la connaissance de la loi de comportement du grain (2.17) permettent d'exprimer les vitesses de déformation macroscopiques en

<sup>1</sup>Ce n'est pas vrai pour le modèle auto-cohérent puisque ce modèle tient compte de l'interaction entre le grain et le milieu homogène équivalent.

fonction des contraintes macroscopiques appliquées. Nous avons :

$$(4.2) \quad \bar{\mathbf{D}} = \langle \alpha_{1_n} \bar{\mathbf{S}} + \alpha_{2_n} \mathbf{M}_3^D + \alpha_{3_n} (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \bar{\mathbf{S}})^D \rangle$$

La connaissance de la fabrique et des paramètres rhéologiques du grain  $\psi_n$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , détermine entièrement le comportement du polycristal.

Dans l'hypothèse d'une répartition homogène des contraintes, une autre formulation fondée sur la définition d'un potentiel de dissipation macroscopique par homogénéisation des potentiels microscopiques, conduit exactement aux mêmes résultats. Soit  $\bar{\phi}_S$  le potentiel de dissipation macroscopique défini par  $(\bar{n} + 1)\bar{\phi}_S = \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{S}}$ , et tel que :

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{\partial \bar{\phi}_S}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \left( \frac{\partial \bar{\phi}_S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \right)^D.$$

L'hypothèse de contraintes homogènes conduit de façon immédiate aux égalités :

$$(4.3) \quad (\bar{n} + 1)\bar{\phi}_S = \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{S}} = \langle \mathbf{D} \rangle : \bar{\mathbf{S}} = \langle \mathbf{D} : \mathbf{S} \rangle = (n + 1) \langle \phi_S \rangle$$

où  $\phi_S$  est le potentiel de dissipation microscopique (2.14). Nous utiliserons cette méthode pour l'homogénéisation du polycristal orthotrope lorsque  $n = 3$ .

Ces formules montrent que l'exposant de la loi puissance du polycristal est identique à celui de la loi du grain ( $\bar{n} = n$ ).

### 4.3 Homogénéisation du polycristal de glace orthotrope

Nous présentons dans ce paragraphe l'extension des résultats de Lliboutry (1993), pour un polycristal orthotrope de révolution et un grain se déformant uniquement par glissement basal, au cas d'un polycristal de glace orthotrope et pour un comportement de grain orthotrope de révolution. Les lois de comportement orthotrope de révolution et isotrope sont ensuite déduites de la loi du polycristal de glace orthotrope. La comparaison du résultat obtenu dans le cas isotrope avec la loi de Glen (1.3) fournit une relation entre les paramètres rhéologiques du grain et le paramètre de la loi de Glen  $B_n$ .

La fabrique est décrite par une ODF vérifiant des symétries particulières. Pour des raisons de présentation, les cas linéaire et non-linéaire ( $n = 3$ ) sont traités séparément et la plupart des résultats pour le cas  $n = 3$  se trouvent dans l'**Annexe C**.

Pour la glace, l'anisotropie macroscopique est une anisotropie de fabrique et non pas une anisotropie de structure comme pour le bois par exemple. Ce sont donc les orientations des axes- $c$  des cristaux qui vérifient les symétries. Nous considérons un polycristal de glace dont la répartition des orientations des grains respecte trois plans de symétrie orthogonaux les uns par rapport aux autres, construits sur la base ortho-normée du repère d'orthotropie  $\{\mathbf{R}\}$ . Puisque la présence de deux plans de symétrie orthogonaux entraîne forcément l'existence d'un troisième plan de symétrie orthogonal aux deux premiers, l'ODF décrivant la fabrique d'un polycristal orthotrope doit vérifier les conditions suivantes, dans le repère d'orthotropie :

$$(4.4) \quad f(\theta, \varphi) = f(\theta, -\varphi) = f(\theta, \pi + \varphi) = f(\theta, \pi - \varphi).$$

Les relations (4.4) entraînent les simplifications suivantes lors de l'intégration selon  $\varphi$  :

$$(4.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \sin^m \varphi \cos^n \varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ ou } m \text{ impair} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) \sin^m \varphi (1 - \sin^2 \varphi)^{n/2} d\varphi & \text{sinon} \end{cases}.$$

Nous aurions pu proposer la relation (4.4) comme conséquence des relations de symétries vérifiées par l'ODF analytique (3.27) obtenue au **Chapitre 3**. En effet, lors du calcul de (3.27), nous avons supposé que l'histoire des contraintes conservait les symétries d'orthotropie du matériau, puis nous avons observé que l'ODF déduite de ces hypothèses vérifiait les relations (3.28) analogues aux relations (4.4).

### 4.3.1 Comportement linéaire

#### 4.3.1.1 Polycristal orthotrope

Lorsque  $n = 1$ , en tenant compte des simplifications données par (4.5), la loi macroscopique est obtenue par l'homogénéisation (4.2) sous la forme :

$$(4.6) \quad \bar{\mathbf{D}} = \sum_{r=1}^3 (\bar{\alpha}_r \bar{\mathbf{I}}_r \bar{\mathbf{M}}_r^D + \bar{\alpha}_{r+3} (\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_r + \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}})^D),$$

où

$$(4.7) \quad \bar{\mathbf{M}}_r = {}^o \mathbf{e}_r \otimes {}^o \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{I}}_r = \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}),$$

et  $()^D$  désigne la partie déviatoire du tenseur  $()$ .

Les six fluidités  $\bar{\alpha}_r$  sont uniquement fonction des paramètres rhéologiques du grain et de cinq intégrales de l'ODF selon  $\theta$  et  $\varphi$  :

$$(4.8) \quad \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_4 \\ \bar{\alpha}_5 \\ \bar{\alpha}_6 \end{bmatrix} = \frac{\psi}{2} \times \begin{bmatrix} 0 & -3\chi_2 & 6\chi_2 & 4 & -11 & 4 \\ 0 & 3\chi_2 & -6\chi_2 & -3 & 3 & 4 \\ \chi_2 & -5\chi_2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ \beta/2 & -1+\chi_1(5-2\gamma) & 3(1-3\chi_1) & -1 & 3 & -1 \\ \beta/2 & -\chi_2 & -3(1-3\chi_1) & 1 & -1 & -1 \\ 1-\beta/2 & 3(\chi_1(2\gamma+1)-1) & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ J_{30} \\ J_{32} \\ \chi_2 J_{50} \\ \chi_2 J_{52} \\ \chi_2 J_{54} \end{bmatrix},$$

où  $\chi_1 = \beta/(4\gamma - 1)$  et  $\chi_2 = 2(\chi_1(\gamma + 2) - 1)$ .

Les 5 intégrales  $J_{pq}$  sont définies par :

$$(4.9) \quad J_{pq} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) \sin^p \theta \sin^q \varphi d\theta d\varphi,$$

où les facteurs  $\sin^p \theta \sin^q \varphi$  proviennent de l'écriture des tenseurs de structure  $\mathbf{M}_3$  des grains dans le repère d'orthotropie du polycristal.

Pour une ODF donnée, la détermination complète du comportement du matériau nécessite le calcul des cinq intégrales  $J_{pq}$ .

La loi de comportement macroscopique (4.6) dépend des six paramètres indépendants  $\bar{\alpha}_i$ . Ceci est en accord avec les résultats de Boehler (1978) : dans le cas le plus général, la loi de comportement du matériau incompressible linéaire orthotrope dépend de six paramètres.

L'écriture de la loi (4.6) n'est pas unique puisque les invariants et les tenseurs de structure du cas orthotrope, définis par (4.7), vérifient les relations :

$$(4.10) \quad \sum_{r=1}^3 \bar{I}_r = 0, \quad \sum_{r=1}^3 \bar{M}_r^D = \mathbf{0}.$$

En utilisant les relations :

$$(4.11) \quad \frac{\partial \bar{I}_r}{\partial \bar{\mathbf{S}}} = \frac{\partial \text{tr } \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbf{M}}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \text{tr } \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}^2}{\partial \bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_r,$$

le potentiel de dissipation macroscopique associé à la loi (4.6) est obtenu comme :

$$(4.12) \quad \bar{\phi}_S^{(1)} = \frac{1}{2} \bar{\alpha}_r \bar{I}_r^2 + \bar{\alpha}_{r+3} \text{tr } \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}^2.$$

La loi (4.6) peut aussi se mettre sous la forme matricielle classique suivante, en utilisant la notation de Voigt :

$$(4.13) \quad \begin{Bmatrix} \bar{D}_{11} \\ \bar{D}_{22} \\ \bar{D}_{33} \\ 2 \bar{D}_{23} \\ 2 \bar{D}_{31} \\ 2 \bar{D}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{F} & \bar{E} & & & \\ \bar{F} & \bar{B} & \bar{D} & & & \\ \bar{E} & \bar{D} & \bar{C} & & & \\ & & & \bar{G} & & \\ & & & & \bar{H} & \\ & & & & & \bar{J} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{33} \\ \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{31} \\ \bar{S}_{12} \end{Bmatrix},$$

où, d'après Boehler (1975), les neuf paramètres  $\bar{A}, \dots, \bar{J}$  sont définis en fonction des paramètres  $\bar{\alpha}_r$  par :

$$(4.14) \quad \begin{cases} \bar{A} = (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_4 + 4\bar{\alpha}_6)/3 \\ \bar{B} = (\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_5 + 4\bar{\alpha}_6)/3 \\ \bar{C} = 2\bar{\alpha}_6 \\ \bar{D} = -(\bar{\alpha}_2 + 2(\bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_5 - \bar{\alpha}_6))/3 \\ \bar{E} = -(\bar{\alpha}_1 + 2(\bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_4 - \bar{\alpha}_6))/3 \\ \bar{F} = -(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3 + 2(\bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_5 - 2\bar{\alpha}_6))/3 \\ \bar{G} = 2(\bar{\alpha}_5 + \bar{\alpha}_6) \\ \bar{H} = 2(\bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_6) \\ \bar{J} = 2(\bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_5) \end{cases}.$$

Les neuf paramètres de la matrice (4.13) vérifient les trois conditions :

$$(4.15) \quad \bar{A} + \bar{F} + \bar{E} = \bar{F} + \bar{B} + \bar{D} = \bar{E} + \bar{D} + \bar{C} = \text{Constante},$$

nécessaires pour assurer l'incompressibilité, ce qui ramène le nombre de paramètres indépendants à six.

De même que pour la loi (4.6), l'écriture sous forme matricielle n'est pas unique, puisque l'ajout d'une constante aux six termes  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{E}$  et  $\bar{F}$  ne change pas la valeur des vitesses de déformation pour un état de contrainte donné. La valeur de la constante dans les relations (4.15) dépend aussi de la façon dont est écrite la matrice (4.13). Nous avons choisi les six termes de la matrice de telle sorte que celle-ci soit symétrique.

La formulation matricielle permet de mieux visualiser la forme d'anisotropie du matériau pour une fabrique donnée. Nous l'utiliserons pour illustrer l'évolution du comportement macroscopique lorsque la fabrique évolue sous l'application d'un chargement constant.

#### 4.3.1.2 Polycristal orthotrope de révolution

Nous supposons maintenant que la fabrique présente un axe de symétrie. Le système de coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$  nous conduit à choisir l'axe  $\mathbf{e}_3$  comme axe de symétrie. Dans ce cas, l'ODF ne dépend que de  $\theta$  et la condition de symétrie vérifiée par l'ODF s'écrit :

$$(4.16) \quad f(\theta, \varphi) = f(\theta).$$

L'orthotropie de révolution est un cas particulier de l'orthotropie, obtenue lorsqu'un des plans de symétrie du matériau est isotrope. Les résultats qui suivent sont donc dérivés directement du cas orthotrope.

La condition (4.16) entraîne les égalités suivantes pour les intégrales  $J_{pq}$  définies par (4.9) :

$$(4.17) \quad J_{32} = \frac{J_{30}}{2}, \quad J_{52} = \frac{J_{50}}{2}, \quad J_{54} = \frac{3J_{50}}{8},$$

où  $J_{30}$  et  $J_{50}$  sont uniquement fonction de  $\theta$ . De ces égalités, nous obtenons trois relations liant les paramètres  $\bar{\alpha}_r$  du cas orthotrope :

$$(4.18) \quad \left| \begin{array}{l} \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 0 \\ \bar{\alpha}_4 = \bar{\alpha}_5 \end{array} \right. .$$

Des égalités (4.18) nous déduisons que la loi de comportement macroscopique du matériau orthotrope de révolution incompressible linéaire peut se mettre sous la forme classique suivante :

$$(4.19) \quad \bar{D} = \bar{\alpha}_1^* \bar{S} + \bar{\alpha}_2^* \bar{I}_3 \bar{M}_3^D + \bar{\alpha}_3^* (\bar{S} \bar{M}_3 + \bar{M}_3 \bar{S})^D,$$

où les trois paramètres  $\bar{\alpha}_r^*$  sont définis en fonction des  $\bar{\alpha}_r$  du cas orthotrope par :

$$(4.20) \quad \left| \begin{array}{l} \bar{\alpha}_1^* = 2\bar{\alpha}_4 \\ \bar{\alpha}_2^* = \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_3^* = \bar{\alpha}_6 - \bar{\alpha}_4 \end{array} \right. .$$

Par suite, en utilisant les relations (4.8) et (4.17), il vient :

$$(4.21) \quad \left[ \begin{array}{c} \bar{\alpha}_1^* \\ \bar{\alpha}_2^* \\ \bar{\alpha}_3^* \end{array} \right] = \frac{\psi}{2} \left[ \begin{array}{ccc} \beta & 1-\beta & 1/4 \\ 2(\chi(\gamma+2)-1) & -10(\chi(\gamma+2)-1) & 35/8 \\ 1-\beta & (\chi(16\gamma+5)-7)/2 & -5/4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 1 \\ J_{30} \\ 2(\chi(\gamma+2)-1)J_{50} \end{array} \right],$$

où  $\chi = \beta/(4\gamma - 1)$ .

En reportant les égalités (4.18) dans (4.14), nous obtenons les relations suivantes, reliant les neuf paramètres  $\bar{A}$ ,  $\dots$ ,  $\bar{J}$  de la forme matricielle, dans le cas de l'orthotropie de révolution :

$$(4.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A} = \bar{B} \\ \bar{D} = \bar{E} \\ \bar{G} = \bar{H} \\ \bar{J} = 2(\bar{A} - \bar{F}) \end{array} \right. ,$$

ce qui permet la réécriture de l'expression matricielle (4.13) sous la forme classique :

$$(4.23) \quad \left\{ \begin{array}{c} \bar{D}_{11} \\ \bar{D}_{22} \\ \bar{D}_{33} \\ 2\bar{D}_{23} \\ 2\bar{D}_{31} \\ 2\bar{D}_{12} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} \bar{A} & \bar{F} & \bar{D} & & & \\ \bar{F} & \bar{A} & \bar{D} & & & \\ \bar{D} & \bar{D} & \bar{C} & & & \\ & & & \bar{G} & & \\ & & & & \bar{G} & \\ & & & & & 2(\bar{A} - \bar{F}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{33} \\ \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{31} \\ \bar{S}_{12} \end{array} \right\}.$$

En utilisant (4.14), (4.18) et (4.20), les paramètres du cas orthotrope de révolution  $\bar{A}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{F}$  et  $\bar{G}$  sont définis en fonction des  $\bar{\alpha}_i^*$  par :

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A} = (3\bar{\alpha}_1^* - \bar{\alpha}_2^* + 4\bar{\alpha}_3^*)/3 \\ \bar{C} = \bar{\alpha}_1^* + 2\bar{\alpha}_3^* \\ \bar{D} = 2(-\bar{\alpha}_2^* + \bar{\alpha}_3^*)/3 \\ \bar{F} = (-\bar{\alpha}_2^* + 4\bar{\alpha}_3^*)/3 \\ \bar{G} = 2(\bar{\alpha}_1^* + \bar{\alpha}_3^*) \end{array} \right. .$$

La condition d'incompressibilité (4.15) n'implique plus que deux relations indépendantes dans le cas orthotrope de révolution, ce qui ramène le nombre de paramètres indépendants à trois.

Lorsque le grain se déforme uniquement par glissement basal, (*i.e.*  $\beta = 0$ ), nos résultats, présentés sous forme invariante par changement de repère, sont identiques à ceux obtenus par Lliboutry (1993).

#### 4.3.1.3 Polycristal isotrope

Lorsque la fabrique du polycristal est isotrope, par définition l'ODF vérifie la relation :

$$(4.25) \quad f(\theta, \varphi) = 1.$$

Il vient alors  $J_{30} = 2/3$  et  $J_{50} = 8/15$  et, par conséquent, les trois paramètres  $\bar{\alpha}_r^*$  se réduisent à :

$$(4.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha}_1^* = \frac{\psi}{10} \frac{8\gamma(\beta + 1) + \beta - 2}{4\gamma - 1} \\ \bar{\alpha}_2^* = 0 \\ \bar{\alpha}_3^* = 0 \end{array} \right. .$$

Par identification, nous obtenons une relation entre le paramètre de la loi de Glen (1.3) et les paramètres rhéologiques du grain dans le cas linéaire, soit :

$$(4.27) \quad \frac{\psi}{B_1} = 5 \frac{4\gamma - 1}{8\gamma(\beta + 1) + \beta - 2}.$$

La valeur maximale du rapport entre la fluidité dans le plan de base du grain et la fluidité du polycristal isotrope est obtenue lorsque  $\beta = 0$ , soit pour un grain se déformant uniquement par glissement basal. Comme Lliboutry (1993), nous obtenons une valeur maximale de ce rapport de  $5/2$ .

### 4.3.2 Comportement non-linéaire ( $n = 3$ )

Les résultats *volumineux* engendrés par ce calcul d'homogénéisation sont regroupés dans l'**Annexe C**.

Pour simplifier la présentation des résultats, le calcul d'homogénéisation est réalisé sur le potentiel de dissipation. Comme nous l'avons montré, ceci est équivalent au calcul sur les vitesses de déformation pour le modèle à contraintes homogènes.

Lorsque  $n = 3$ , le potentiel de dissipation du cristal de glace  $\phi_S^{(n)}$  donné par (2.14) se met sous la forme suivante :

$$(4.28) \quad \phi_S^{(3)} = \frac{\psi_3}{4} \left( \alpha_1 \text{tr}(\mathbf{S}^2) + \alpha_2 \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S})^2 + \alpha_3 \text{tr}(\mathbf{M}_3 \mathbf{S}^2) \right)^2.$$

où

$$(4.29) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\beta}{2} \\ \alpha_2 = \beta \frac{\gamma + 2}{4\gamma - 1} - 1 \\ \alpha_3 = 1 - \beta \end{cases}$$

Le potentiel de dissipation du polycristal de glace orthotrope est déduit de l'homogénéisation (4.3) des potentiels de tous les grains lorsque l'ODF respecte les symétries (4.4). En tenant compte des simplifications (4.5), l'homogénéisation conduit à une expression du potentiel de dissipation macroscopique fonction uniquement des six invariants des contraintes déviatoires macroscopiques :

$$(4.30) \quad \begin{aligned} \bar{\phi}_S^{(3)} = & \sum_{r=1}^2 \left( \bar{a}_r \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}})^4 + \bar{a}_{r+3} \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}}) \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}}) \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}})^2 + \right. \\ & \left. \bar{a}_{r+8} \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}}^2) \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_{r+1} \bar{\mathbf{S}}^2) + \bar{a}_{r+11} \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}) \text{tr}(\bar{\mathbf{S}}^3) \right) + \\ & \sum_{r=1}^3 \left( \bar{a}_{r+5} \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}^2)^2 + \bar{a}_{11+3r} \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}^2) \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}})^2 + \right. \\ & \bar{a}_{12+3r} \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}^2) \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}}) \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}}) + \\ & \left. \bar{a}_{13+3r} \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}^2) \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}})^2 \right) + \\ & \bar{a}_3 \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}})^2 \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}})^2 + \bar{a}_{11} \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}}^2) \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}}^2). \end{aligned}$$



Les vingt-deux paramètres rhéologiques  $\bar{a}_r$  sont définis à partir des trois paramètres rhéologiques du grain et de quatorze intégrales  $J_{pq}$  définies par (4.9). L'expression des  $\bar{a}_r$  est donnée en **Annexe C**.

D'après (4.3), postuler l'existence d'un potentiel viscoplastique pour le grain comme hypothèse de départ, conduit à une loi macroscopique dérivant aussi d'un potentiel. Lorsque  $n = 3$ , le potentiel le plus général du matériau orthotrope incompressible est la forme homogène à la puissance 4 des contraintes, engendrée par la combinaison des produits des 6 invariants indépendants  $\text{tr } \bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}}$ ,  $\text{tr } \bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}}$ ,  $\text{tr } \bar{\mathbf{S}}^3$  et  $\text{tr } \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}^2$  ( $r = 1, 2, 3$ ) (Boehler, 1978), soit un total de vingt-deux termes. Le potentiel (4.30) contient bien vingt-deux paramètres, mais l'homogénéisation conduite avec le modèle à contraintes homogènes introduit sept relations supplémentaires entre les  $\bar{a}_r$ . Ces sept relations permettent d'exprimer les paramètres  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_{12}$  et  $\bar{a}_{13}$  en fonction des quinze autres (relations (C.2) à (C.8) de l'**Annexe C**). Par conséquent, la loi de comportement du matériau orthotrope non-linéaire ( $n = 3$ ) dérivant du modèle à contraintes homogènes, dépend de seulement quinze paramètres indépendants si aucune hypothèse, hormis (4.4), n'est faite sur la forme de l'ODF.

#### 4.3.2.1 Polycristal orthotrope de révolution

Lorsque l'ODF vérifie la condition de symétrie (4.16), les intégrales  $J_{pq}$ , données par (4.9), ne dépendent que de  $\theta$ , et par conséquent il vient :

$$(4.31) \quad \left| \begin{array}{ll} J_{p2} = \frac{J_{p0}}{2} & p = 3, 5, 7, 9; \quad J_{p4} = \frac{3J_{p0}}{8} \quad p = 5, 7, 9; \\ J_{p6} = \frac{5J_{p0}}{16} & p = 7, 9; \quad J_{p8} = \frac{35J_{p0}}{128} \quad p = 9 \end{array} \right.$$

Les relations (4.31) diminuent le nombre de paramètres  $\bar{a}_r$  indépendants puisqu'elles conduisent aux quinze égalités suivantes :

$$(4.32) \quad \left| \begin{array}{l} 12\bar{a}_1 = 12\bar{a}_2 = 2\bar{a}_3 = 3\bar{a}_4 = 2\bar{a}_5 \\ 2\bar{a}_6 = 2\bar{a}_7 = \bar{a}_9 \\ \bar{a}_{10} = \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{12} = \bar{a}_{13} \\ 2\bar{a}_{14} = \bar{a}_{15} = 2\bar{a}_{16} = 2\bar{a}_{17} = \bar{a}_{18} = 2\bar{a}_{19} \\ 2\bar{a}_{20} = \bar{a}_{21} = 2\bar{a}_{22} \end{array} \right. .$$

En tenant compte des égalités (4.32), le potentiel de dissipation du matériau orthotrope (4.30) se simplifie sous la forme :

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \bar{\phi}_S^{(3)} = & \bar{a}_1^* \text{tr} (\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}})^4 + \bar{a}_2^* \text{tr} (\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}})^2 \text{tr} (\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}}^2) + \\ & \bar{a}_3^* \text{tr} (\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}})^2 \text{tr} (\bar{\mathbf{S}}^2) + \bar{a}_4^* \text{tr} (\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}}) \text{tr} (\bar{\mathbf{S}}^3) + \bar{a}_5^* \text{tr} (\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}}^2)^2 + \\ & \bar{a}_6^* \text{tr} (\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}}^2) \text{tr} (\bar{\mathbf{S}}^2) + \bar{a}_7^* \text{tr} (\bar{\mathbf{S}}^2)^2, \end{aligned}$$

où les sept paramètres  $\bar{a}_r^*$  sont donnés en fonction des paramètres  $\bar{a}_r$  par :

$$(4.34) \quad \left| \begin{array}{lll} \bar{a}_1^* = \bar{a}_1 & \bar{a}_2^* = \bar{a}_{20} - \bar{a}_{14} & \bar{a}_3^* = \bar{a}_{14}, \\ \bar{a}_4^* = -\bar{a}_{12} & \bar{a}_5^* = \bar{a}_6 + \bar{a}_8 - \bar{a}_{10} & \\ \bar{a}_6^* = -2\bar{a}_6 + \bar{a}_{10} & \bar{a}_7^* = \bar{a}_6 & \end{array} \right. .$$

Des sept relations indépendantes (C.2) à (C.8) du cas orthotrope données en **Annexe C**, seules deux sont conservées lors du passage au cas orthotrope de révolution. Par conséquent, le potentiel de dissipation du matériau orthotrope de révolution non-linéaire dérivé du calcul d'homogénéisation dépend de seulement cinq paramètres indépendants. D'après Boehler (1978), la loi la plus générale du matériau incompressible non-linéaire ( $n = 3$ ) orthotrope de révolution dépend de vingt trois paramètres, et de sept lorsque la loi dérive d'un potentiel de dissipation. Le modèle à contraintes homogènes induit donc deux relations supplémentaires par rapport au cas général.

Lorsque  $\beta = 0$ , ces résultats sont identiques à ceux obtenus par Lliboutry (1993).

#### 4.3.2.2 Polycristal isotrope

Pour le cas limite où le matériau est isotrope, l'ODF vérifie l'égalité (4.25) et les quatre intégrales du cas orthotrope de révolution prennent les valeurs :

$$(4.35) \quad J_{30} = \frac{2}{3}, \quad J_{50} = \frac{8}{15}, \quad J_{70} = \frac{16}{35}, \quad J_{90} = \frac{128}{315}.$$

Le potentiel de dissipation  $\phi_S^{(3)}$  se met sous la forme classique suivante :

$$(4.36) \quad \bar{\phi}_S^{(3)} = \frac{\psi_3}{420} (210\alpha_1^2 + 8\alpha_2^2 + 28\alpha_3^2 + 56\alpha_1\alpha_2 + 140\alpha_1\alpha_3 + 24\alpha_2\alpha_3) \text{tr}(\bar{\mathbf{S}}^2)^2.$$

En remplaçant les paramètres  $\alpha_r$  par  $\beta$  et  $\gamma$ , et en identifiant (4.36) avec le potentiel dont dérive la loi de Glen (1.3) lorsque  $n = 3$ , il vient :

$$(4.37) \quad \frac{\psi_3}{B_3} = \frac{35(4\gamma - 1)^2}{(168\gamma^2 - 16\gamma + 23)\beta^2 + (168\gamma^2 - 16\gamma - 4)\beta + 8(4\gamma - 1)^2}.$$

Le rapport maximum entre la fluidité dans le plan de base du grain  $\psi_3$  et le paramètre de la loi de Glen  $B_3$  est obtenu lorsque  $\beta = 0$ , comme pour le cas linéaire, et vaut  $35/8 = 4.375$ .

Notons qu'avec le modèle de comportement de grain utilisant les trois systèmes de glissement basal, prismatique et pyramidal, Castelnau (1996) trouve, pour le modèle à contraintes homogènes, une valeur maximale pour ce rapport de 3.27 lorsque les contraintes de références des plans prismatique et pyramidal sont égales ( $\tau_b = \tau_c$ ). Il semble donc que le modèle à contraintes homogènes conduise à une valeur limite inférieure à 10 pour ce rapport, quelque soit le modèle de comportement de grain adopté. Avec le modèle auto-cohérent, Castelnau (1996) et Meyssonier et Philip (1996) trouvent une valeur de ce rapport pouvant être très supérieure à 10 suivant la valeur des paramètres rhéologiques du grain.

## 4.4 Conclusion

En imposant sur l'ODF les conditions de symétrie d'orthotropie, nous obtenons une loi macroscopique orthotrope qui peut s'écrire sous forme invariante par changement de repère (Boehler, 1978).

Dans le cas linéaire, la loi de comportement dépend de six paramètres indépendants déterminés à partir du calcul de cinq intégrales  $J_{pq}$  et des trois paramètres rhéologiques du grain. Dans le cas non-linéaire ( $n = 3$ ), il y a quinze paramètres indépendants qui dépendent du calcul de quatorze intégrales  $J_{pq}$  et des trois paramètres rhéologiques du grain. Le calcul d'homogénéisation induit sept relations supplémentaires entre les paramètres de la loi par rapport à la formulation la plus générale du matériau orthotrope non-linéaire incompressible dérivant d'un potentiel.

Pour le rapport entre la fluidité en cisaillement parallèlement au plan de base du grain et la fluidité de la glace isotrope, nous obtenons une valeur maximale de 2.5 dans le cas linéaire et de 4.375 pour  $n = 3$ . Ces valeurs sont inférieures à la valeur de 10 obtenue par l'expérience et les mesures *in-situ*. Notons qu'il est possible d'obtenir une valeur de 10 pour ce rapport avec le modèle auto-cohérent (Castelnau, 1996; Meyssonier et Philip, 1996). Par conséquent, l'influence de l'anisotropie sur l'écoulement des calottes polaires serait encore amplifiée par l'utilisation du modèle auto-cohérent.

Pour une ODF donnée, la loi de comportement du polycristal de glace est déterminée uniquement par le calcul des quatorze intégrales (4.9). D'un point de vue numérique, ces résultats diminuent de façon significative le volume de calculs à effectuer par comparaison à une programmation où tous les termes seraient calculés.

Dans le chapitre suivant, nous étudions l'évolution conjuguée de la fabrique et du comportement du polycristal sous des sollicitations de traction, compression et cisaillement simple.



## Chapitre 5

# Evolution conjuguée de la fabrique et du comportement du polycristal de glace

### 5.1 Introduction

Dans le **Chapitre 4**, nous avons mis en place les équations qui permettent de calculer la réponse instantanée du polycristal de glace soumis à un état de contrainte imposé. Comme nous l'avons vu au **Chapitre 3**, la fabrique du polycristal va alors évoluer sous l'effet de ce chargement. La fabrique évoluant, la réponse du polycristal est elle aussi modifiée.

Dans ce chapitre, l'évolution conjuguée de la fabrique et des propriétés mécaniques du polycristal est étudiée pour des conditions de chargement de compression-traction et de cisaillement simple. L'influence des paramètres rhéologiques du grain sur le comportement macroscopique est analysée.

Dans le cas d'une compression-traction, nous proposons une formulation entièrement analytique que nous comparons au modèle auto-cohérent de Meyssonier et Philip (1996). Nous étudions l'effet d'un écoulement en déformation plane sur l'évolution des propriétés du matériau et sur la forme des fabriques obtenues.

Pour un état de déformation de cisaillement simple, nous réalisons des tests numériques en utilisant un polycristal dont la fabrique est décrite par un nombre fini de grains discrets.

### 5.2 Evolution des propriétés mécaniques en compression-traction

#### 5.2.1 Cinématique de la déformation

Dans la suite, nous nous intéressons à un état de contrainte de compression-traction dans le repère de référence  $\{R\}$ . Seules les composantes diagonales du tenseur des contraintes déviatoires sont non nulles au cours de la déformation. Si à l'état initial le polycristal est isotrope, alors la fabrique formée est orthotrope et les repères d'orthotropie et de

référence sont donc confondus. Le champ des déplacements dans le polycristal est alors :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{X}_1 \\ \bar{x}_2 = \lambda_2 \bar{X}_2 \\ \bar{x}_3 = \lambda_3 \bar{X}_3 \end{cases}, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

où les  $\bar{x}_i$  et  $\bar{X}_i$  sont les composantes du vecteur position dans les configurations actuelle et initiale, respectivement.

Dans le repère de référence, le tenseur gradient de transformation  $\bar{\mathbf{F}}$  prend la forme suivante :

$$(5.2) \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Sachant que le gradient de vitesse  $\bar{\mathbf{L}}$  est donné par (Rougée, 1997, page 61) :

$$(5.3) \quad \bar{\mathbf{L}} = \dot{\bar{\mathbf{F}}} \bar{\mathbf{F}}^{-1},$$

les tenseurs vitesses de déformation et vitesses de rotation prennent les valeurs :

$$(5.4) \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3 \lambda_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{W}} = \mathbf{0}.$$

Les dilatations  $\lambda_i$  à l'instant  $t$  sont alors données en fonction des vitesses de déformation par :

$$(5.5) \quad \lambda_i = e^{\int_0^t \bar{D}_{ii} dt} \quad i = 1, 2, 3.$$

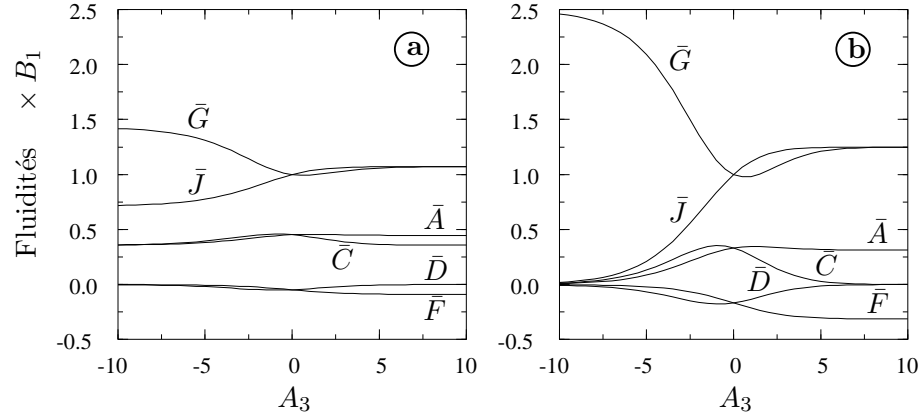
Dans la configuration initiale, à  $t = 0$ , nous avons  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Au cours de la déformation, une valeur de  $\lambda_i$  inférieure (respectivement supérieure) à 1 correspond à une diminution (respectivement augmentation) de la longueur du polycristal dans la direction  $\mathbf{e}_i$ .

### 5.2.2 Compression-traction

Nous étudions maintenant le cas particulier d'une compression-traction telle que  $\bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = -\bar{S}_{33}/2$ . Si dans la configuration initiale la fabrique est isotrope, alors sa déformation est définie par :

$$(5.6) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3^{-1/2}.$$

L'expression analytique de l'ODF est donnée par (3.29) comme une fonction du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$  défini par (3.30). A une date donnée, le comportement du matériau orthotrope de révolution linéaire est donné par l'expression (4.19) où les  $\bar{\alpha}_i^*$  sont uniquement fonction des deux intégrales  $J_{30}$  et  $J_{50}$  (relations (4.21)). En portant l'expression (3.29) de  $f(\theta)$  dans les relations (4.9) qui définissent  $J_{30}$  et  $J_{50}$ , il



**Fig. 5.1** : Evolution des fluidités macroscopiques de l'expression matricielle (4.23), en compression-traction, en fonction du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$ , pour  $\gamma = 1$  et (a)  $\beta = 0.5$  et (b)  $\beta = 0.0$ .

est alors possible d'obtenir une expression analytique de ces deux intégrales en fonction du seul paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$ .

Pour une compression ( $A_3 < 0$ ), il vient

$$(5.7) \quad \begin{aligned} J_{30} &= \frac{\arcsin(e^{(A_3/2)} \rho) e^{-A_3} - \rho}{\rho^3}, \\ J_{50} &= \frac{\arcsin(e^{(A_3/2)} \rho) (e^{-2A_3} - 4e^{-A_3}) + \rho(2 + e^{-A_3})}{2\rho^5}, \end{aligned}$$

où  $\rho = \sqrt{e^{-A_3} - 1}$ .

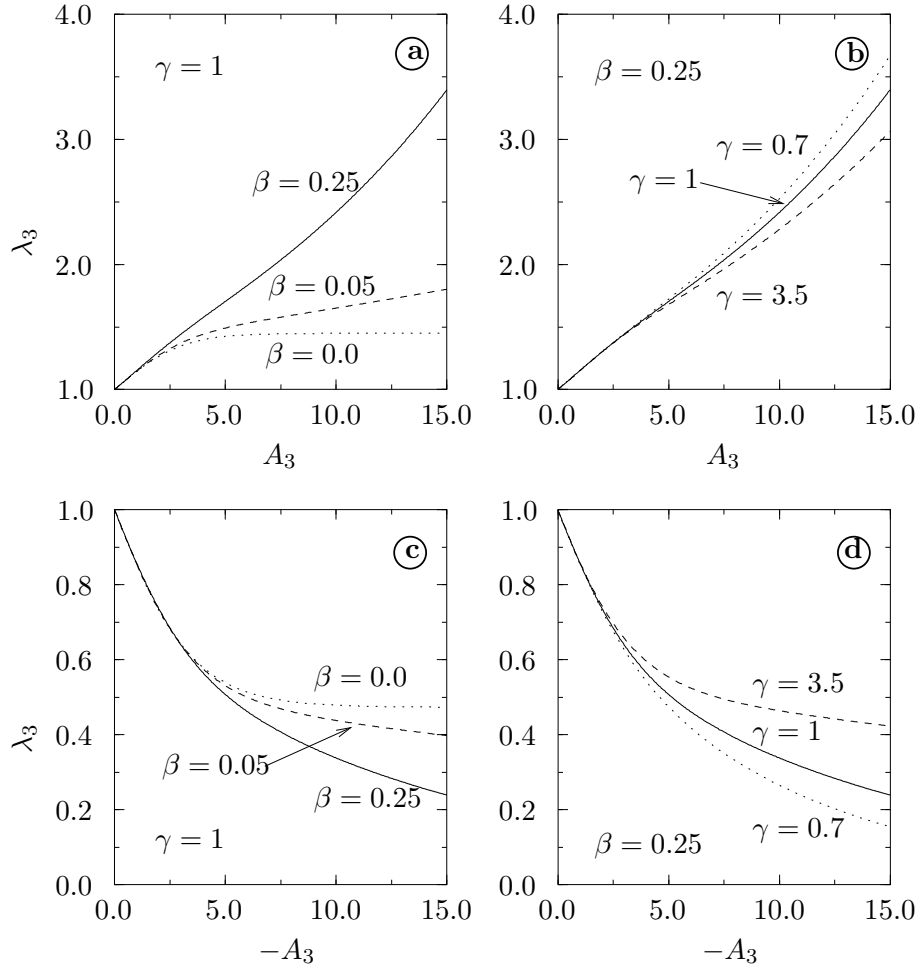
Pour une traction ( $A_3 > 0$ ),  $J_{30}$  et  $J_{50}$  sont données par

$$(5.8) \quad \begin{aligned} J_{30} &= \frac{-e^{-A_3}(A_3/2 + \ln(1 + \rho)) + \rho}{\rho^3}, \\ J_{50} &= \frac{(e^{-2A_3} - 4e^{-A_3})(\ln(1 + \rho) + A_3/2) + \rho(2 + e^{-A_3})}{2\rho^5}, \end{aligned}$$

où  $\rho = \sqrt{1 - e^{-A_3}}$ .

Les Figures 5.1a et 5.1b montrent l'évolution des paramètres de la matrice des fluidités (4.23)  $\bar{A}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$  et  $\bar{J} = 2(\bar{A} - \bar{F})$  en fonction de  $A_3$ , pour  $\beta = 0$  et  $\beta = 0.5$  respectivement. Pour une valeur donnée de  $A_3$ , l'anisotropie du polycristal est d'autant plus marquée que l'anisotropie du grain est importante (*i.e.*  $\beta$  proche de zéro).

Lorsque  $\beta = 0$ , le comportement du polycristal fortement comprimé ( $\bar{A}_3 < -6.0$ ) devient équivalent à celui d'un grain isolé ( $\bar{G} = \bar{H} = 5B_1/2$  et les autres fluidités nulles). Pour une traction, si  $\beta = 0$ , la fluidité  $\bar{C}$  tend vers zéro lorsque la déformation augmente et par conséquent le polycristal ne peut plus se déformer. Ceci met en évidence la nécessité d'introduire un comportement de grain plus réaliste que celui où seul le glisse-



**Fig. 5.2 :** Evolution de la dilatation  $\lambda_3$  en fonction du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$ , pour (a) et (b) une traction et (c) et (d) une compression. L'influence du comportement du grain est montrée pour différentes valeurs de  $\beta$  et  $\gamma = 1$  sur les figures (a) et (c) et pour différentes valeurs de  $\gamma$  et  $\beta = 0.25$  sur les figures (b) et (d). Pour chaque couple  $(\beta, \gamma)$ , la fluidité  $\psi$  est calculée de façon à obtenir la même valeur  $B_1$  de la fluidité du polycristal isotrope.



ment basal intervient. Lorsque  $\beta = 0$ , la dilatation  $\lambda_3$  dans la direction  $\mathbf{e}_3$  ne peut pas dépasser 0.47 en compression et 1.45 en traction (*cf.* Figure 5.2).

En permettant au grain de se déformer selon d'autres directions que celles contenues dans le plan de base, nous obtenons un comportement du polycristal beaucoup plus réaliste, même pour des valeurs très faibles de  $\beta$ . Cette différence de comportement est d'autant plus marquée que le grain a subi une grande déformation, comme le montrent les Figures 5.2a et 5.2c.

L'influence du paramètre  $\gamma$  est montrée sur les Figures 5.2b et 5.2d. Pour une même valeur du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$ , plus  $\gamma$  augmente, plus la déformation  $\lambda_3$  diminue. L'influence du paramètre  $\gamma$  sur la réponse macroscopique est d'autant moins importante que  $\beta$  diminue et pour  $\beta = 0$  la réponse du polycristal devient indépendante de  $\gamma$ .

### 5.2.3 Comparaison avec un modèle auto-cohérent

Meyssonier et Philip (1996) ont développé un modèle auto-cohérent "1-site"<sup>1</sup> (SC1) pour décrire le comportement linéaire du polycristal de glace orthotrope de révolution. Ce modèle est plus complexe que le modèle à contraintes homogènes puisqu'il tient compte de l'interaction entre le grain et le polycristal. A cet effet, le grain est considéré comme une inclusion dans un milieu homogène équivalent (HEM) représentant le comportement macroscopique du polycristal. Le comportement du HEM, *a priori* inconnu, est calculé comme la réponse moyenne sur tous les grains aux conditions appliquées aux frontières du polycristal. Meyssonier et Philip (1996) proposent des résultats analytiques pour l'interaction entre le grain et le HEM, mais l'auto-cohérence et l'évolution de la fabrique doivent être traitées numériquement.

Le modèle SC1 étant fondé sur le même modèle de comportement du grain (2.9) (restreint toutefois au cas  $\gamma = 1$ ), la comparaison avec notre modèle permet de mettre en évidence l'influence de l'hypothèse de contraintes homogènes.

Pour le modèle SC1, la relation entre les paramètres rhéologiques du grain, lorsque  $\gamma = 1$ , et la fluidité  $B_1$  de la glace isotrope est donnée par :

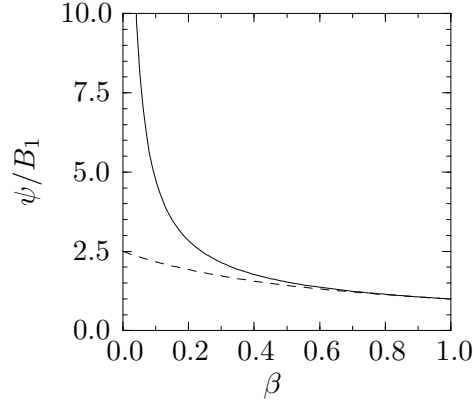
$$(5.9) \quad \frac{\psi}{B_1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 24\beta}}{6\beta}.$$

La comparaison des relations (5.9) et (4.27) où  $\gamma = 1$  montre que pour un comportement identique de grain, les deux modèles conduisent à des valeurs différentes pour la fluidité  $B_1$  du polycristal isotrope. Sur la Figure 5.3 est représentée, pour les deux modèles, l'évolution du rapport entre la fluidité en cisaillement parallèlement au plan de base et la fluidité du polycristal isotrope. La valeur expérimentale de 10 de ce rapport est obtenue pour  $\beta = 0.04$  avec le modèle SC1, tandis que pour le modèle à contraintes homogènes ce rapport reste inférieur à 2.5.

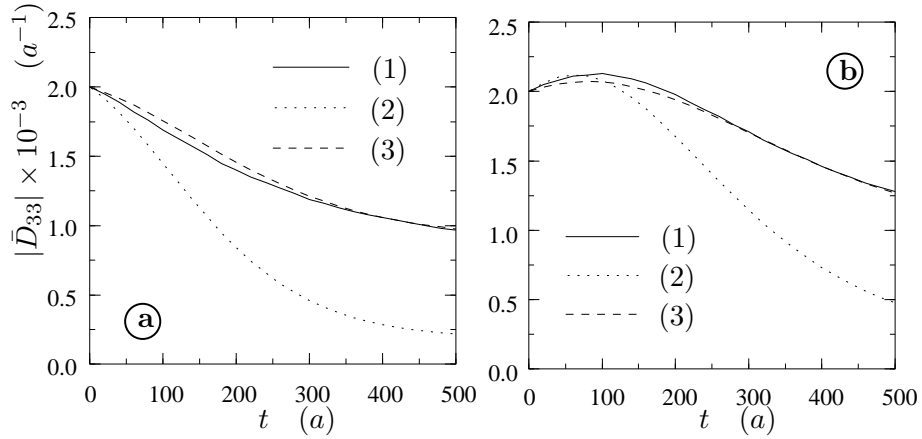
#### 5.2.3.1 Comparaison de l'évolution des propriétés mécaniques

Les Figures 5.4a et 5.4b montrent l'évolution de la vitesse de déformation  $\bar{D}_{33}$  en fonction du temps pour une traction et une compression, respectivement. Les valeurs des

<sup>1</sup>Pour Self-Consistent "1-site" model.



**Fig. 5.3 :** Comparaison de l'évolution du rapport entre la fluidité en cisaillement parallèlement au plan de base  $\psi$  et la fluidité du polycristal isotrope  $B_1$  en fonction du paramètre d'anisotropie du grain  $\beta$ , pour le modèle SC1 (trait continu) et le modèle à contraintes homogènes (tirets).



**Fig. 5.4 :** Evolution de la valeur absolue de la vitesse de déformation dans la direction  $e_3$  en fonction du temps  $t$  pour  $|\bar{S}_{33}| = 0.1 \text{ MPa}$  et  $B_1 = 0.04 \text{ MPa}^{-1} \text{ a}^{-1}$  en (a) traction uniaxiale et (b) compression uniaxiale. Courbe (1) : modèle SC1, pour  $\beta = 0.04$  et  $\psi = 0.4$  ; courbe (2) : modèle à contraintes homogènes pour  $\beta = 0.04$  et  $\psi = 0.094$  ; courbe (3) : modèle à contraintes homogènes pour  $\beta = 0.25$  et  $\psi = 0.073$ . La valeur  $\beta = 0.04$  correspond à  $\psi/B_1 = 10$  pour le modèle SC1.

paramètres du grain  $\beta$  et  $\psi$  sont ajustées pour que les deux modèles conduisent au même comportement lorsque le polycristal est isotrope (*i.e.* de telle sorte que les relations (5.9) et (4.27) donnent la même valeur pour  $B_1$ ). Ces figures montrent que des réponses semblables dans la direction de chargement peuvent être obtenues avec les deux modèles, mais pour des degrés d'anisotropie différents (*i.e.* pour des  $\beta$  différents). Pour un même degré d'anisotropie ( $\beta = 0.04$  pour les deux modèles) et une même histoire de chargement, le modèle à contraintes homogènes conduit à un durcissement plus rapide du polycristal que le modèle SC1. En effet, la vitesse de déformation  $\bar{D}_{33}$  décroît plus rapidement pour le modèle à contraintes homogènes que pour le modèle SC1, et ceci bien que la valeur de la fluidité en cisaillement dans le plan de base  $\psi$  du modèle SC1 soit supérieure à celle du modèle à contraintes homogènes ( $\psi = 0.4MPa^{-1}a^{-1}$  et  $\psi = 0.094MPa^{-1}a^{-1}$  respectivement). Ceci s'explique principalement par la différence des vitesses de concentration de la fabrique entre les deux modèles, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

Pour les deux modèles, le polycristal présente une phase d'adoucissement en début de compression (*cf.* Figure 5.4b), qui s'explique simplement par l'augmentation en début de chargement du nombre de grains bien orientés pour se déformer<sup>2</sup>. En effet, en début de chargement du polycristal isotrope, le nombre relatif de grains orientés entre  $\theta = \pi/4$  et  $\theta = \pi/2$  est  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \sqrt{2}/2$ , et ils sont donc plus de deux fois plus nombreux que ceux orientés entre 0 et  $\pi/4$ . Quand les axes- $c$  de ces grains tournent vers la direction de compression, le nombre relatif de grains orientés à  $45^\circ$  augmente dans un premier temps et le polycristal est donc plus facile à déformer. La valeur maximum de la fluidité est 5% supérieure à la valeur de la fluidité initiale de la glace isotrope et elle est obtenue à environ 15% de déformation (*cf.* Figure 5.6b).

### 5.2.3.2 Comparaison des fabriques

L'utilisation de l'ODF paramétrée permet de comparer les fabriques de façon objective en étudiant l'évolution des paramètres  $k_i$ . Pour une compression-traction uniaxiale dans la direction  $\mathbf{e}_3$ , la fabrique ne dépend plus que du seul paramètre  $k_3$  puisque  $k_1 = k_2 = k_3^{-1/2}$  et  $\varphi^o = 0$ .

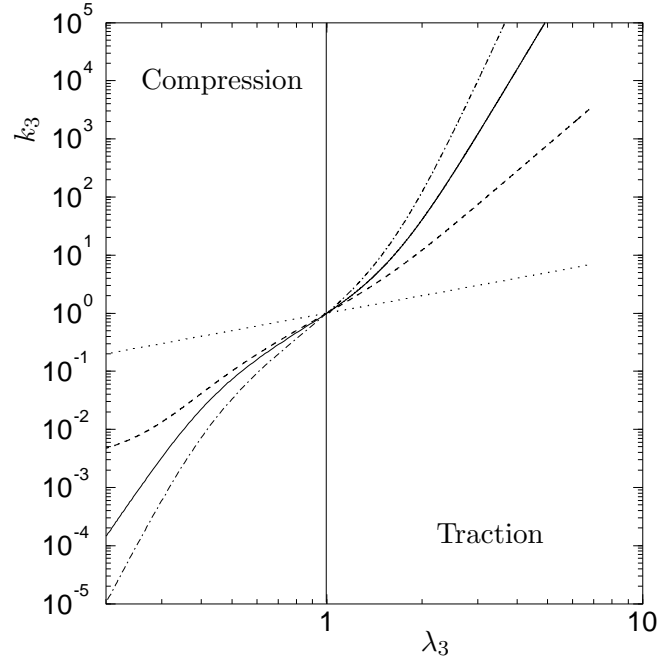
Pour le modèle à contraintes homogènes,  $k_3$  est déterminé analytiquement par les relations (3.36) en introduisant le paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$  défini par (3.30), soit :

$$(5.10) \quad k_3 = e^{A_3/3}.$$

Pour le modèle SC1, la fabrique est décrite à l'aide d'une ODF discrétisée selon  $\theta$ , puis à chaque pas, la valeur du paramètre  $k_3$  est ajustée sur la valeur maximum de l'ODF discrétisée qui se trouve en  $\theta = 0$  pour une compression et en  $\theta = \pi/2$  pour une traction. La forme de la fonction discrète donnée par l'ODF discrétisée est très bien reproduite par l'ODF paramétrée. Ceci montre que l'ODF paramétrée peut être utilisée pour décrire les fabriques obtenues avec le modèle auto-cohérent.

Nous comparons, pour une même valeur de  $B_1$ , l'évolution de  $k_3$  pour les modèles à contraintes homogènes et SC1, mais aussi pour le modèle de Taylor. Dans le cas d'une

<sup>2</sup>autour de l'axe à  $45^\circ$  de la direction de compression



**Fig. 5.5** : Evolution du paramètre de fabrique  $k_3$  en fonction de la dilatation  $\lambda_3$  pour les modèles de Taylor (pointillés), SC1 pour  $\beta = 0.04$  (tirets) et à contraintes homogènes pour  $\beta = 0.04$  (trait mixte) et  $\beta = 0.25$  (trait plein).

compression-traction uniaxiale, l'expression (3.33) conduit à :

$$(5.11) \quad k_3^{Taylor} = e^{\bar{D}_{33}t} = \lambda_3.$$

Le paramètre de fabrique  $k_3^{Taylor}$  est donc directement la dilatation dans la direction  $\mathbf{e}_3$ . Pour ce modèle, la fabrique ne dépend pas des propriétés du cristal lorsque la vitesse de déformation macroscopique est imposée.

Etant donné que les modèles à contraintes homogènes et de Taylor conduisent à la même forme de fonction pour l'ODF analytique, il n'est pas surprenant de bien reproduire la fabrique obtenue sous forme discrète avec le modèle SC1 en utilisant cette fonction. Par contre, il ne semble pas possible d'obtenir un résultat analytique pour l'ODF avec le modèle SC1.

Sur la Figure 5.5 est représentée l'évolution du paramètre de fabrique  $k_3$  en fonction de la dilatation  $\lambda_3$  dans la direction  $\mathbf{e}_3$ . Pour une compression ( $\lambda_3 < 1$ ), plus  $k_3$  est petit plus la texture est concentrée autour de la direction  $\mathbf{e}_3$ . Pour une traction ( $\lambda_3 > 1$ ), c'est l'inverse, plus la valeur de  $k_3$  est grande plus la texture est concentrée en forme de couronne dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{e}_3$ .

Pour une même déformation, la concentration de la fabrique du modèle SC1 est encadrée par le modèle de Taylor en borne inférieure et le modèle à contraintes homogènes en borne supérieure. Ce résultat, déjà observé par Castelnau (1996) mais par la comparaison des figures de pôles, est ici donné de façon explicite et quantifiable par l'intermédiaire de  $k_3$ .

Pour le modèle à contraintes homogènes, nous pouvons observer l'influence du paramètre  $\beta$  sur la cinétique de l'évolution de la fabrique. Plus la valeur de  $\beta$  est petite, plus l'évolution de la fabrique est rapide. Ceci s'explique simplement puisque, d'après la relation (4.27), pour une même valeur de  $B_1$ , si  $\beta$  diminue alors la fluidité dans le plan de base  $\psi$  augmente, et par conséquent la fabrique se concentre plus rapidement.

### 5.2.4 Compression - traction en déformations planes

Dans le but de quantifier l'influence de l'hypothèse de l'écoulement en déformations planes, que nous ferons plus loin pour modéliser la calotte polaire en 2D, nous comparons, pour un même comportement de grain ( $\beta = 0.1$  et  $\gamma = 1$ ), l'évolution de la déformation du polycristal en compression-traction uniaxiale (axisymétrique) à celle obtenue en déformations planes, définie par :

$$(5.12) \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1.$$

Les Figures 5.6a et 5.6b donnent l'évolution de la fluidité adimensionnée dans la direction du chargement  $\mathbf{e}_3$  pour les deux types de déformation, en traction et compression, respectivement.

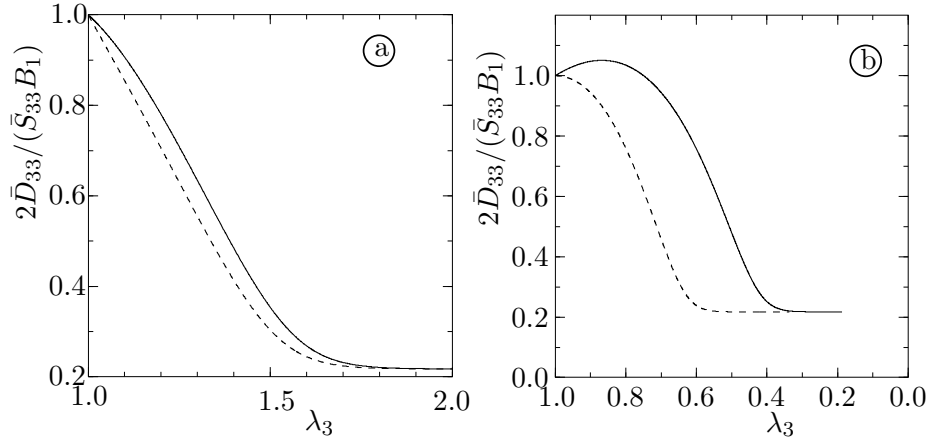
La différence de comportement est surtout visible en compression où l'hypothèse de déformation plane conduit à un durcissement beaucoup plus rapide du matériau. La phase d'adoucissement visible en début de déformation pour une compression uniaxiale n'existe pas lorsque la déformation est plane. En fin d'essai, les deux types de déformations conduisent à la même valeur de fluidité.

Pour une traction, la fluidité limite est égale à la fluidité de compression-traction dans les plans de base puisque tous les axes- $c$  des grains deviennent perpendiculaires à la direction de chargement. Pour une compression, la fluidité limite est égale à celle du grain dans la direction de l'axe- $c$ . Comme ici  $\gamma = 1$ , la traction et la compression conduisent à la même valeur de  $2\bar{D}_{33}/(B_1\bar{S}_{33})$  en fin d'essai, soit  $= \beta\psi$ , et compte tenu de (4.27) il vient :

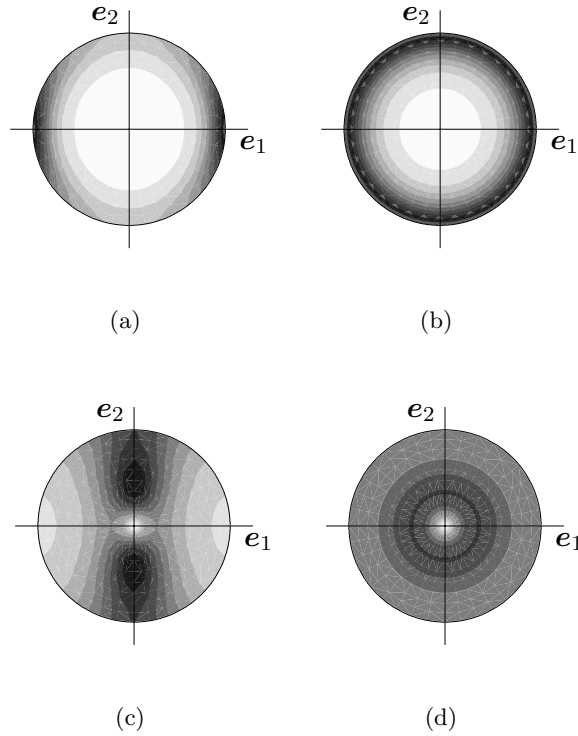
$$(5.13) \quad \frac{2\bar{D}_{33}}{B_1\bar{S}_{33}} = \frac{5\beta}{2 + 3\beta}.$$

Sur la Figure 5.7, nous comparons les fabriques obtenues pour les déformations plane et uniaxiale en traction ( $\lambda_3 = 1.28$ ) et en compression ( $\lambda_3 = 0.78$ ). Pour une même valeur de la dilatation  $\lambda_3$ , les fabriques de compression-traction plane sont beaucoup plus concentrées que celles obtenues en compression-traction uniaxiale et elles ne présentent évidemment pas de symétrie de révolution. Le fait que les fabriques soient plus concentrées en déformation plane explique le durcissement plus rapide du matériau au cours de la déformation (*cf.* Figure 5.6).

Notons que la fabrique de compression plane représentée sur la Figure 5.7a est identique à celle de traction plane de la Figure 5.7c tournée de  $\pi/2$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_2$ . Ceci n'est pas très explicite sur les figures de pôles, à cause de l'*artefact* sur le tracé des iso-valeurs du nombre relatif de grains  $f(\theta, \varphi) \sin \theta$ , qui en  $\theta = 0$  vaut 0 quelle que soit la valeur de l'ODF.



**Fig. 5.6 :** Evolution de la fluidité dans la direction du chargement en : (tirets) déformations planes ( $\lambda_3 = 1/\lambda_1$  et  $\lambda_2 = 1$ ) ; (trait plein) déformation libre ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3^{-1/2}$ ) pour (a) une traction et (b) une compression.



**Fig. 5.7 :** Représentation en projection de Schmidt des fabriques obtenues en traction ( $\lambda_3 = 1.28$ ) (a) plane et (b) uniaxiale ; et en compression ( $\lambda_3 = 0.78$ ) (c) plane et (d) uniaxiale. Du plus foncé au plus clair sont représentés 10 intervalles réguliers entre la valeur maximum de  $f(\theta, \varphi) \sin \theta$  et 0. Cette valeur maximum est différente pour chacune des fabriques.

### 5.3 Application à la modélisation du développement de la fabrique dans le forage de GRIP (Groenland)

Comme Castelnau *et al.* (1996a), nous appliquons notre modèle à la prédiction de l'évolution des fabriques dans le forage de GRIP (Groenland).

Les mesures d'orientation des axes- $c$  sur les carottes de glace de GRIP, réalisées par Thorsteinsson *et al.* (1997), montrent une augmentation continue de la concentration de la fabrique, allant d'une distribution aléatoire des cristaux en surface, à une fabrique à un seul maximum vertical à la profondeur de 2807m. Le forage de GRIP étant positionné au sommet d'un dôme, il est probable que le mode principal de déformation des glaces de GRIP soit une compression verticale. Les fabriques observées présentent une symétrie de révolution autour de l'axe vertical qui est compatible avec ce mode de déformation, et est prédite par la plupart des modèles (voir par exemple Van der Veen et Whillans, 1994; Castelnau et Duval, 1994). D'après Thorsteinsson *et al.* (1997), la brusque augmentation de la taille des grains observée à 2790m (transition Wisconsin-Eemien) est due à l'activation d'un régime de recristallisation discontinue. La recristallisation n'étant pas prise en compte par notre modèle, la comparaison de l'évolution de la fabrique avec les observations de Thorsteinsson *et al.* (1997) est seulement menée de la surface jusqu'à la profondeur de 2800m.

Dans la suite, nous faisons l'hypothèse que la glace est déformée en compression selon l'axe de symétrie du dôme  $x_3$ . Le comportement macroscopique du polycristal est donc donné par les relations (4.21) et (5.7), et il ne dépend que du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$ , donné par (3.30) et des paramètres du grain  $\psi$  et  $\beta$ . Pour une compression, la fabrique est décrite par l'ODF analytique (3.29).

Thorsteinsson *et al.* (1997) caractérisent la concentration des fabriques à l'aide d'un paramètre statistique,  $Ro$ , défini par

$$(5.14) \quad Ro = 2 \|\langle \mathbf{c} \rangle\| - 1,$$

où  $\mathbf{c}$  est le vecteur unitaire définissant l'orientation de l'axe- $c$  dans le repère de référence  $\{\mathbf{R}\}$  ( $\mathbf{c} = \mathbf{R}^g \mathbf{c}$ ),  $\langle \rangle$  représente la moyenne donnée par (1.10), et  $\|\cdot\|$  est la norme d'un vecteur.  $Ro$  vaut 0 pour une fabrique dont tous les axes- $c$  sont distribués aléatoirement, et  $Ro$  prend la valeur maximum de 1 lorsque tous les grains ont la même orientation (Thorsteinsson *et al.* (1997) donnent à  $Ro$  le nom de "degree of orientation", mais nous préférons à "degré d'orientation" de la fabrique, utilisé par Castelnau (1996), le terme de "concentration" de la fabrique).

L'utilisation de l'expression de l'ODF (3.29) dans (1.10) pour évaluer  $\|\langle \mathbf{c} \rangle\|$  conduit à une intégrale simple selon  $\theta$ , qui s'intègre analytiquement pour donner la concentration de la fabrique  $Ro$  en fonction du paramètre de l'histoire des contraintes  $A_3$ , soit

$$(5.15) \quad Ro = 2 \left| \frac{1 - e^{A_3/2}}{1 - e^{A_3}} \right| - 1.$$

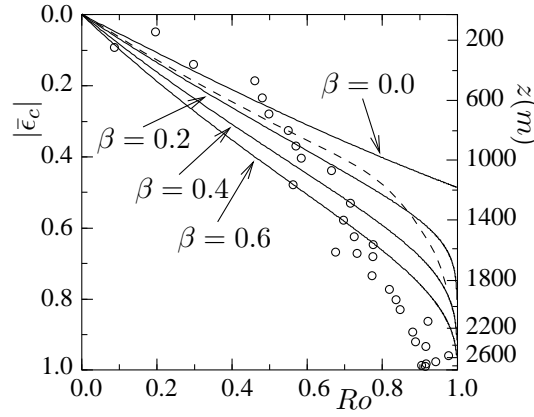
D'après les relations (4.19), (4.21) et (5.7),  $\bar{D}_{33}$  s'exprime uniquement en fonction de  $\beta$  et  $A_3$ . En utilisant la différentielle de la relation (3.30), *i.e.*  $dA_3 = 3\psi \bar{S}_{33} dt/2$ , on peut exprimer  $\bar{D}_{33} dt$  en fonction de  $dA_3$ , et par suite obtenir la déformation cumulée

$\bar{\epsilon}_c = \lambda_3 - 1$  en fonction de  $A_3$  et de  $\beta$  seulement (la dépendance en  $\psi$  est implicitement incluse dans  $A_3$ ). Il est alors possible, en utilisant  $A_3$  comme paramètre, de calculer numériquement l'évolution de  $Ro$  en fonction de la déformation cumulée  $\bar{\epsilon}_c$ .

Comme Castelnau *et al.* (1996a), nous utilisons le modèle de Dahl-Jensen *et al.* (1993), qui donne l'amincissement d'une couche d'épaisseur  $a$  relativement à l'accumulation  $a_0$  en surface, en fonction de la profondeur  $z$  dans le forage. La déformation cumulée et le taux d'amincissement des couches sont reliés par :

$$(5.16) \quad \bar{\epsilon}_c = a/a_0 - 1,$$

ce qui permet d'exprimer la déformation cumulée "observée" en fonction de  $z$ . On peut alors relier l'évolution des valeurs de  $Ro$ , mesurées par Thorsteinsson *et al.* (1997) à différentes profondeurs, à celle de  $\bar{\epsilon}_c$ .



**Fig. 5.8 :** Evolution de la concentration de la fabrique  $Ro$  en fonction de la déformation cumulée  $\bar{\epsilon}_c$ , donnée par notre modèle pour différentes valeurs de  $\beta$  (courbes pleines), donnée par le modèle VPSC de Castelnau *et al.* (1996) (tirets) et d'après la fabrique mesurée dans le forage de GRIP (Thorsteinsson *et al.*, 1997). L'échelle donnant les profondeurs est calculée en utilisant le modèle de Dahl-Jensen *et al.* (1993).

La Figure 5.8 montre l'évolution de la concentration  $Ro$  en fonction de  $\bar{\epsilon}_c$  donnée par notre modèle pour différentes valeurs de  $\beta$  ainsi que l'évolution de  $Ro$  mesurée par Thorsteinsson *et al.* (1997). Nous vérifions bien que l'évolution de la fabrique est d'autant plus rapide que le grain est plus anisotrope (*i.e.* pour  $\beta$  petit). L'évolution de  $Ro$  obtenu par Castelnau *et al.* (1996a) avec le modèle VPSC pour un comportement non linéaire (tirets sur la Figure 5.8) est très similaire à nos résultats lorsque  $\beta = 0.2$  (et avec un comportement linéaire).

Pour des valeurs absolues de déformations cumulées inférieures à 0.4 (*i.e.* pour des profondeurs inférieures à 1000m, d'après Dahl-Jensen *et al.* (1993)), l'évolution de la concentration de la fabrique est bien reproduite par notre modèle si  $\beta$  est petit ( $\beta \leq 0.2$ ). Pour  $|\bar{\epsilon}_c|$  supérieure à 0.4, notre modèle conduit à une évolution de la fabrique plus rapide que celle observée.

D'après Castelnau *et al.* (1996a), cette différence entre les modèles et les mesures pourrait résulter de la progressive polygonisation des grains mal orientés pour se déformer.



Les grains dont le plan de base est perpendiculaire à la direction de compression vont polygoniser jusqu'à ce que la différence d'orientation des sous-joints atteignent une valeur critique de 10 à 15°, puis ils vont se diviser pour former deux grains "nouveaux" dont l'orientation est tournée de 10 à 15° par rapport à la direction de compression. Thorsteinsson *et al.* (1997) ont observé que la polygonisation, responsable de l'arrêt du grossissement des grains et de la forme sphérique des grains, est prédominante dans le forage de GRIP entre 700m à 2800m de profondeur (profondeur à laquelle la recristallisation discontinue commence).

Sans contester le rôle de la polygonisation sur le ralentissement de la formation des fabriques, nous verrons au **Chapitre 8** que les hypothèses faites ici pour la cinématique de l'écoulement dans le forage de GRIP (compression uniaxiale et vitesse de déformation donnée par le modèle de Dahl-Jensen *et al.* (1993)) sont aussi, certainement, responsables de la vitesse excessive d'évolution des fabriques modélisées. Nous montrerons l'influence de l'écoulement sur la formation des fabriques dans le forage de GRIP.

## 5.4 Tests numériques de cisaillement simple

Dans la partie inférieure des calottes polaires, si le socle rocheux est relativement plan, la glace est déformée principalement en cisaillement. Dans cette partie, nous présentons l'évolution des propriétés mécaniques et de la fabrique d'un polycristal de glace, initialement isotrope, soumis à un état de déformation de cisaillement simple.

### 5.4.1 Cinématique de la déformation

Par définition (Gilormini *et al.*, 1993), un matériau est soumis à un cisaillement simple d'amplitude  $\kappa(t)$  dans le référentiel  $\{R\}$ , si le champ des vitesses qui lui est imposé est de la forme :

$$(5.17) \quad \begin{cases} \bar{u}_1 = \dot{\kappa} \bar{X}_2 \\ \bar{u}_2 = 0 \\ \bar{u}_3 = 0 \end{cases},$$

où  $\bar{X}_i$  sont les composantes du vecteur position dans la configuration initiale. Les tenseurs gradient de vitesse  $\bar{\mathbf{L}}$ , vitesses de déformation  $\bar{\mathbf{D}}$  et vitesses de rotation  $\bar{\mathbf{W}}$  sont alors donnés par :

$$(5.18) \quad \bar{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\kappa}/2 & 0 \\ \dot{\kappa}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\kappa}/2 & 0 \\ -\dot{\kappa}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si la vitesse de déformation imposée  $\bar{D}_{12}$  est constante au cours de la déformation, il vient :

$$(5.19) \quad \kappa = 2\bar{D}_{12}t.$$

L'étude du cisaillement simple avec le modèle à contraintes homogènes n'est pas directe puisque, pour un état de contrainte donné, les vitesses de déformation dépendent de l'anisotropie du polycristal. Pour imposer *correctement* le cisaillement simple, il est donc nécessaire à chaque pas de temps de déterminer l'état de contraintes à appliquer pour maintenir  $\bar{D}_{12}$  constante et toutes les autres composantes du tenseur des vitesses de déformation nulles.

Van der Veen et Whillans (1994) réalisent des essais numériques de cisaillement simple en imposant uniquement la contrainte de cisaillement et une vitesse de rotation macroscopique ajustée à chaque pas pour qu'elle soit égale à la vitesse de déformation de cisaillement. Au cours de l'essai, les cristaux s'orientent à  $135^\circ$  de la direction de cisaillement, et la vitesse de déformation diminue et s'annule lorsque tous les axes- $c$  des cristaux sont orientés à  $135^\circ$ . La fabrique qu'ils obtiennent en fin d'essai est donc équivalente, en fait, à celle obtenue pour le cisaillement pur.

Pour vérifier la condition cinématique (5.17), nous utilisons une méthode implicite qui tient compte de l'évolution des propriétés du matériau et par conséquent de la variation des contraintes à imposer durant l'incrément de temps  $dt$ .

Les essais que nous présentons ont été réalisés en utilisant 800 grains discrets répartis aléatoirement à l'état initial. Nous choisissons ce modèle de représentation de la texture pour éliminer au maximum les problèmes numériques liés aux calculs d'intégrales de fonctions présentant des pics prononcés et pour ne pas faire d'hypothèse implicite<sup>3</sup> sur l'anisotropie du polycristal. La réponse macroscopique est étudiée pour  $\gamma = 1$  et différentes valeurs de  $\beta$ .

#### 5.4.2 Evolution de la fabrique et des propriétés du matériau

Sur la Figure 5.9 est représentée l'évolution de la fluidité en cisaillement adimensionnelle  $2\bar{D}_{12}/(B_1\bar{S}_{12})$  en fonction de la déformation  $\kappa$  et pour différents comportements de grain. Dans un premier temps le matériau se durcit, puis si  $\beta \neq 0$ , le matériau s'adoucit et la fluidité tend vers une valeur limite, correspondant à la fluidité en cisaillement parallèlement au plan de base du grain isolé.

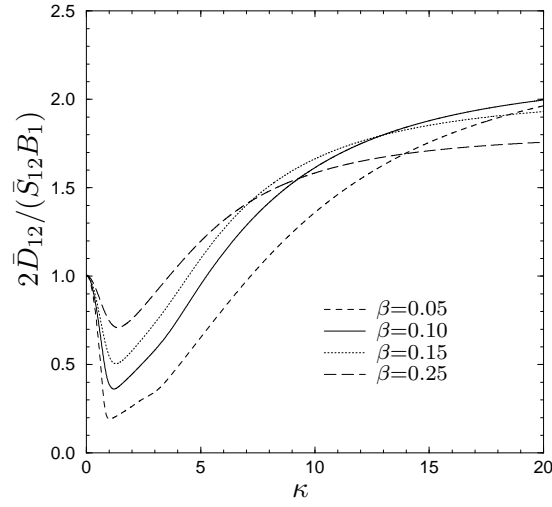
Sur la Figure 5.10, l'observation des différentes fabriques au cours de la déformation permet de comprendre les variations observées sur la fluidité macroscopique.

En début de chargement, lorsque le polycristal est isotrope,  $\bar{D}_{12} = B_1\bar{S}_{12}/2$  et  $\bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = 0$ , et les équations (3.43) se simplifient en remplaçant  $\psi/B_1$  par son expression (4.27) en fonction de  $\beta$  :

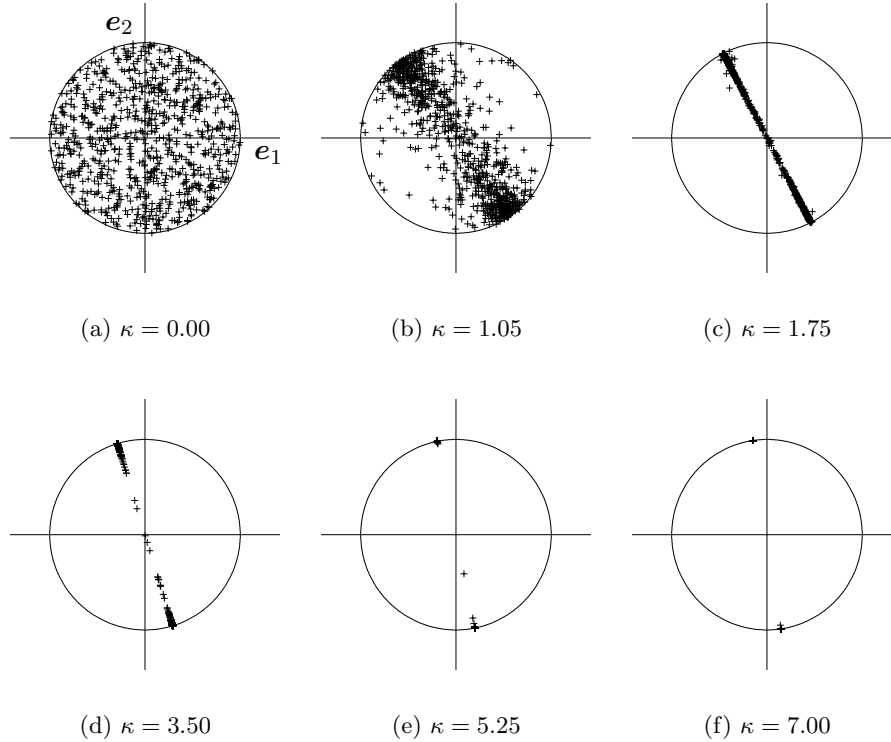
$$\begin{cases} \dot{\theta} = -\frac{5}{2(2+3\beta)} \sin 2\theta \sin 2\varphi \bar{D}_{12} \\ \dot{\varphi} = -\left(\frac{5}{2+3\beta} \cos 2\varphi + 1\right) \bar{D}_{12} \end{cases}.$$

Une représentation de ces équations est donnée sur la Figure 5.11a, où sont marqués les points où  $\dot{\theta}$  et/ou  $\dot{\varphi}$  s'annulent, ainsi que le sens de la rotation des grains selon  $\theta$  et  $\varphi$ . En début de chargement les axes- $c$  se dirigent vers le plan (II) perpendiculaire au plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  et incliné de l'angle  $\bar{\varphi}_0 = (\arccos((2+3\beta)/5) + \pi)/2$ . Pour un grain se déformant uniquement par glissement dans les plans de base ( $\beta = 0$ ) cet angle vaut  $123.2^\circ$ , tandis

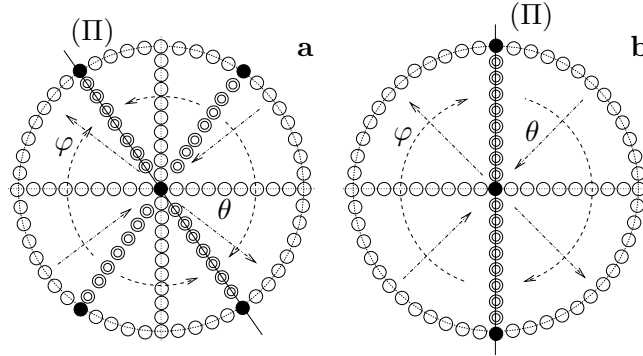
<sup>3</sup>en choisissant l'ODF paramétrée par exemple



**Fig. 5.9 :** Evolution de la fluidité en cisaillement simple en fonction de la déformation  $\kappa$  pour  $\gamma = 1$  et pour différentes valeurs de  $\beta$ .



**Fig. 5.10 :** Représentation en projection de Schmidt des fabriques obtenues en cisaillement simple pour différentes valeurs de  $\kappa$  et pour un comportement du grain donné par  $\beta = 0.1$  et  $\gamma = 1$ .



**Fig. 5.11** : Zones où  $(\circ) \dot{\theta} = 0$ ,  $(\odot) \dot{\varphi} = 0$ ,  $(\bullet) \dot{\theta} = 0$  et  $\dot{\varphi} = 0$  pour un cisaillement simple  $\bar{L}_{12} > 0$  lorsque (a) le polycristal est isotrope et (b) tous les axes- $c$  des grains sont orientés selon  $\mathbf{e}_2$ . Les flèches en pointillés représentent le sens de la rotation selon  $\varphi$  et les flèches en trait mixte celui selon  $\theta$ .

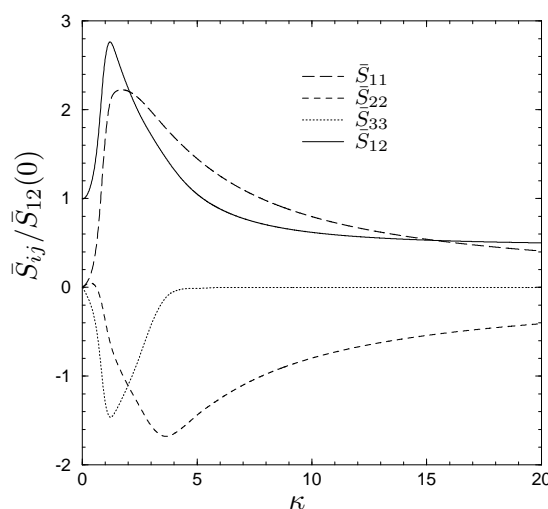
que pour un grain isotrope ( $\beta = 1$ ) la valeur de  $\bar{\varphi}_0$  est  $90^\circ$ . Plus le grain est anisotrope, plus l'orientation du plan (II) est défavorable pour la déformation macroscopique, ce qui explique la répartition selon la valeur de  $\beta$  du début des courbes de la Figure 5.9. Castelnau (1996) trouve une valeur  $\bar{\varphi}_0 \approx 120^\circ$  avec le modèle à contraintes homogènes, mais pour un comportement de grain non-linéaire, ce qui peut expliquer la différence de  $3^\circ$ .

Au cours de la déformation, l'orientation du plan (II) tourne vers la position  $\bar{\varphi} = \pi/2$  avec une vitesse décroissante, tandis que la concentration des axes- $c$  dans le plan augmente (cf. Figure 5.10 pour  $\kappa = 1.05$  et  $\kappa = 1.75$ ). Simultanément, les orientations des grains tournent vers  $\theta = \pi/2$  mais de façon moins rapide que selon  $\varphi$ .

Pour  $\kappa > 7.0$ , tous les grains ont quasiment la même orientation ( $\theta = \pi/2, \varphi$ ) et ils continuent à tourner vers  $\mathbf{e}_2$  ( $\varphi = \pi/2$ ). Dans cette configuration, le comportement macroscopique est équivalent à celui du grain isolé, ce qui permet d'étudier analytiquement la stabilité de la fabrique observée. Nous donnons les détails de ce calcul en **Annexe D**. Ce calcul montre que, lorsque  $\beta \neq 0$ , si tous les grains sont concentrés en  $(\theta = \pi/2, \varphi)$  alors ils s'orientent perpendiculairement à la direction du cisaillement avec une vitesse décroissante et s'annulant en  $\varphi = \pi/2$  (cf. Figure 5.11b). La stabilité de cette position d'équilibre dépend du sens de la perturbation. Après une perturbation dans le sens direct, les grains reviennent sur la position d'équilibre, tandis que pour une perturbation dans le sens indirect les grains tournent d'un demi-tour pour s'arrêter dans la position d'équilibre opposée<sup>4</sup>.

Sur la Figure 5.9, nous observons que plus le grain est anisotrope, (*i.e.* plus  $\beta$  se rapproche de zéro), plus la valeur minimum de la fluidité se rapproche de zéro. Lorsque  $\beta = 0$ , nous obtenons une réponse macroscopique différente puisque la fluidité décroît continuellement vers zéro et la déformation devient alors impossible. Nous n'obtenons pas une fabrique à un seul maximum puisque les axes- $c$  des grains restent bloqués dans

<sup>4</sup>Mais qui définit la même position du grain.



**Fig. 5.12 :** Evolution des rapports entre les contraintes appliquées et la contrainte initiale de cisaillement, en fonction de la déformation  $\kappa$ , pour un comportement de grain  $\beta = 0.1$  et  $\gamma = 1$ .

le plan (II). L'étude de la stabilité d'un grain montre que, même si nous obtenions une fabrique à un seul maximum, il ne serait pas possible, en appliquant les conditions strictes du cisaillement simple, de faire tourner un grain incliné par rapport à la perpendiculaire à la direction du cisaillement (*cf.* **Annexe D**). En effet, si  $\varphi \neq \pi/2$ , les conditions  $\bar{D}_{11} = \bar{D}_{22} = 0$  entraînent dans ce cas particulier  $\bar{D}_{12} = 0$ , et le grain ne se déforme pas, quelle que soit la contrainte appliquée.

Sur la Figure (5.12) est représentée l'évolution des rapports entre les contraintes appliquées et la contrainte de cisaillement initiale pour un comportement de grain  $\beta = 0.1$  et  $\gamma = 1$ . Pour vérifier les conditions cinématiques du cisaillement simple, il est nécessaire d'appliquer des contraintes trois fois supérieures à la contrainte initiale de cisaillement. En début d'essai, la forte compression dans la direction  $\mathbf{e}_3$ , due à l'hypothèse de déformations planes, explique la faible vitesse de rotation des grains vers  $\theta = \pi/2$ . Néanmoins, une étude du signe de  $\dot{\theta}$  montre que tout au long de l'essai, les orientations des grains situés autour du plan (II) se dirigent vers  $\theta = \pi/2$  (*i.e.*  $\dot{\theta} > 0$ ). Ensuite, lorsque tous les grains ont la même orientation, l'état de contrainte devient plan et la valeur des contraintes normales diminue. A l'équilibre, seule la contrainte de cisaillement n'est pas nulle et vaut  $\bar{S}_{12}(\infty) = (2 + 3\beta)\bar{S}_{12}(0)/5$ .

### 5.4.3 Discussion

Castelnau *et al.* (1996b) ont obtenu des résultats similaires aux nôtres avec les modèles auto-cohérent et de Taylor. Pour le modèle auto-cohérent, l'activité relative des plans prismatiques devient très importante lorsque la déformation augmente. D'après ces auteurs, une telle activité n'est pas réaliste pour le cristal de glace où la majorité des dislocations sont observées dans les plans de base. Pour le modèle à contraintes homogènes et en activant uniquement le glissement basal, Castelnau *et al.* (1996b) trouvent une

fabrique qui bloque la déformation : ceci est en accord avec nos résultats pour  $\beta = 0$ .

Si le grain ne se déforme pas uniquement par glissement basal, tous les modèles conduisent donc à une fabrique à un seul maximum s'orientant perpendiculairement à la direction de cisaillement. Cependant, il est alors nécessaire d'activer fortement d'autres modes que la déformation par cisaillement parallèle au plan de base, ce qui conduit à un comportement de grain non réaliste pour la glace. Il est probable que sous une telle sollicitation l'accommodation se fasse par recristallisation dynamique et que d'autres formes de fabriques soient créées. Néanmoins, puisque nous ne tenons pas compte des phénomènes de recristallisation dans notre modèle, nous pourrions faire varier l'anisotropie du grain (*i.e.*  $\beta$ ) pour obtenir un comportement du polycristal plus réaliste.

Nous avons réalisé des tests de cisaillement simple en utilisant l'ODF paramétrée (3.34) pour décrire la fabrique (Staroszczyk et Gagliardini, 1999). Les courbes  $2\bar{D}_{12}/(\bar{S}_{12}B_1)$  obtenues dans ces conditions diffèrent légèrement de celles de la Figure 5.9, mettant ainsi en évidence le caractère non orthotrope de la déformation en cisaillement simple. Néanmoins, seule la valeur du minimum de la fluidité en cisaillement est modifiée (le polycristal se durcit moins) lorsque l'hypothèse de fabrique orthotrope est faite de façon implicite, par l'utilisation de l'ODF paramétrée (3.34). Les autres résultats présentés ci-dessus avec les grains discrets restent valables pour l'ODF paramétrée.

Notons enfin qu'il est possible d'obtenir une solution analytique pour l'ODF en cisaillement simple avec le modèle de Taylor. Nous présentons ces calculs dans l'**Annexe E**. L'expression (E.5) montre que la fabrique évolue vers un maximum orienté perpendiculairement à la direction de cisaillement. Il est intéressant de remarquer que l'ODF analytique (E.5) ne présente pas de symétries d'orthotropie.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'évolution des propriétés mécaniques du polycristal au cours de la déformation, pour des chargements de compression, traction et cisaillement simple. Ces études montrent la nécessité d'introduire d'autres modes de déformation que le glissement basal pour obtenir un comportement du polycristal réaliste. D'un point de vue macroscopique, il est alors possible d'obtenir des fabriques de cisaillement simple à un seul maximum orienté perpendiculairement à la direction de cisaillement.

Dans le chapitre suivant, nous implémentons la loi de comportement orthotrope dans un code aux éléments finis, pour étudier l'influence de l'anisotropie du polycristal sur l'écoulement à l'échelle de la calotte polaire.

## Chapitre 6

# Ecoulement de glace anisotrope

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous résolvons numériquement, pour une géométrie donnée, l'écoulement d'une calotte de glace anisotrope dont les champs de fabriques et de températures sont des données variant en fonction des coordonnées de l'espace.

Pour une géométrie donnée de calotte polaire simplifiée (2D en déformations planes ou axisymétrique), nous comparons les écoulements obtenus avec différents champs de fabriques et de températures. Nous mesurons la sensibilité de l'écoulement aux paramètres microscopiques  $\beta$  et  $\gamma$  qui définissent le comportement du grain. Enfin, nous comparons les champs de vitesses des écoulements plan (déformations planes) et axisymétrique obtenus pour un même profil de la surface de calotte polaire.

### 6.2 Problème à résoudre

#### 6.2.1 Types d'écoulement étudiés

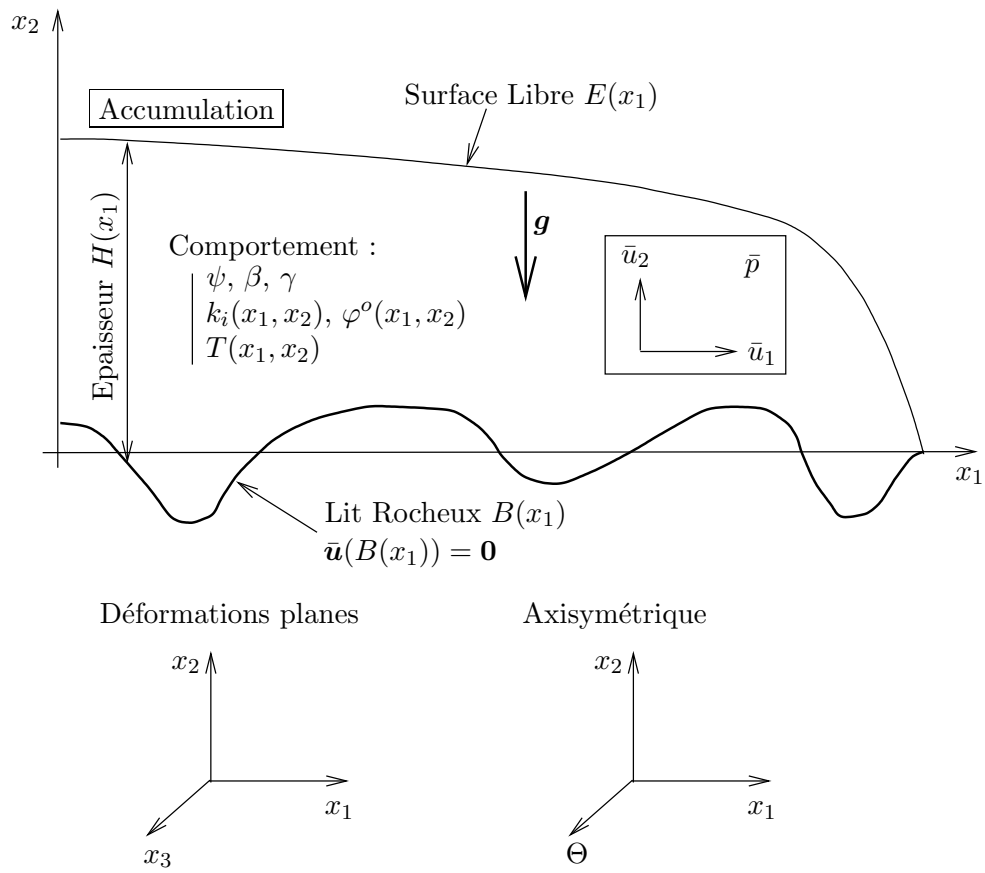
Les écoulements étudiés sont plan (déformations planes) ou axisymétrique. Pour l'écoulement plan, les quantités (vecteur ou tenseur) sont exprimées dans le repère cartésien de référence  $\{R\}$  défini sur la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ , tandis que pour l'écoulement axisymétrique, nous utiliserons le repère défini sur la base cylindrique  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_\Theta)$  de coordonnées  $(x_1, x_2, \Theta)$ .

La glace s'écoule sous l'action des forces de pesanteur dirigées selon  $\mathbf{e}_2$ . Les calottes étudiées présentent une symétrie par rapport au dôme situé en  $x_1 = 0$ .

Les notations utilisées sont définies sur la Figure 6.1 où est schématisé le problème à résoudre.

#### 6.2.2 Loi de comportement de la glace orthotrope

Le comportement de la glace est supposé linéaire et orthotrope, le plan de l'écoulement étant l'un des trois plans de symétrie du matériau. En un point du domaine, l'orthotropie du polycristal est décrite par les quatre paramètres de l'ODF donnée par (3.34). Les trois premiers paramètres  $k_i$  définissent le degré d'anisotropie du polycristal, et le



**Fig. 6.1** : Schématisation du problème à résoudre. Pour une section verticale donnée, l'écoulement est soit en déformations planes soit axisymétrique. Les quantités encadrées sont des résultats du calcul et les autres des données d'entrée du calcul.



repère d'orthotropie est positionné par rapport au repère de référence par le quatrième paramètre  $\varphi^o$  comme défini sur la Figure 3.7.

La formulation variationnelle que nous allons utiliser nécessite d'introduire la loi inverse donnant les contraintes déviatoires en fonction des vitesses de déformation. L'inversion de la loi de comportement (4.6) est présentée en **Annexe F**. Le comportement de la glace peut être défini à partir de son potentiel de dissipation  $\bar{\phi}_D$  :

$$(6.1) \quad \bar{\phi}_D = \sum_{r=1}^3 \left( \frac{1}{2} \bar{\eta}_r (\text{tr } \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{D}})^2 + \bar{\eta}_{r+3} \text{tr } \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{D}}^2 - \frac{1}{3} (\bar{\eta}_r + 2\bar{\eta}_{r+3}) \text{tr } \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{D}} \text{tr } \bar{\mathbf{D}} \right),$$

où les coefficients  $\bar{\eta}_r$  sont donnés en **Annexe F**. Les contraintes déviatoires macroscopiques  $\bar{\mathbf{S}}_{ij}$  dérivent du potentiel  $\bar{\phi}_D$ , soit :

$$(6.2) \quad \bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial \bar{\phi}_D}{\partial \bar{\mathbf{D}}},$$

avec les conditions

$$(6.3) \quad \bar{D}_{33} = \bar{D}_{23} = \bar{D}_{31} = 0,$$

pour l'écoulement plan, et

$$(6.4) \quad \left| \begin{array}{l} \bar{D}_{33} (= \bar{D}_{\Theta\Theta}) = \frac{\bar{u}_1}{x_1} \quad , \\ \bar{D}_{2\Theta} = \bar{D}_{\Theta 1} = 0 \end{array} \right.$$

pour l'écoulement axisymétrique.

Les conditions (6.3) et (6.4) découlent des hypothèses  $\bar{u}_3 = 0$  et  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  indépendants de  $x_3$ .

Notons que le troisième terme dans l'expression du potentiel (6.1) est nul, mais qu'il permet de retomber exactement sur l'expression de la loi de comportement (F.6) de l'**Annexe F** en appliquant (6.2).

### 6.2.3 Equations du problème

Les équations qui définissent l'écoulement sont :

- l'équation de l'équilibre quasi-statique :

$$(6.5) \quad \text{div } \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{g} = 0,$$

où  $\rho \mathbf{g}$  est le vecteur des forces de volumes dues à la pesanteur,

- l'équation de la conservation de la masse

$$(6.6) \quad \text{div } \rho \bar{\mathbf{u}} = 0.$$

La glace étant incompressible, cette dernière équation se réduit à l'équation d'incompressibilité

$$(6.7) \quad \bar{u}_{i,i} = \bar{D}_{ii} = 0.$$

En introduisant le déviateur des contraintes, défini par

$$(6.8) \quad \bar{\mathbf{S}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{p}\mathbf{I}$$

et avec  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_2$ , les équations précédentes se simplifient suivant le type d'écoulement étudié.

### 6.2.3.1 Ecoulement plan (déformations planes)

Pour l'écoulement plan, l'équation de l'équilibre quasi-statique (6.5), projetée sur le repère de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$ , se réduit à :

$$(6.9) \quad \left| \begin{array}{l} \bar{S}_{11,1} + \bar{S}_{12,2} + \bar{p}_{,1} = 0 \\ \bar{S}_{12,1} + \bar{S}_{22,2} + \bar{p}_{,2} = \rho g \end{array} \right. ,$$

et l'équation d'incompressibilité devient en tenant compte de (6.3) :

$$(6.10) \quad \bar{D}_{11} + \bar{D}_{22} = 0,$$

qui peut se réécrire en fonction des vitesses sous la forme :

$$(6.11) \quad \bar{u}_{1,1} + \bar{u}_{2,2} = 0.$$

### 6.2.3.2 Ecoulement axisymétrique

Dans le cas de l'écoulement axisymétrique, l'équation de l'équilibre quasi-statique (6.5), projetée sur le repère de coordonnées cylindriques  $(x_1, x_2, \Theta)$ , se réduit à :

$$(6.12) \quad \left| \begin{array}{l} \bar{S}_{11,1} + \bar{S}_{12,2} + \frac{\bar{S}_{11} - \bar{S}_{\Theta\Theta}}{x_1} + \bar{p}_{,1} = 0 \\ \bar{S}_{12,1} + \bar{S}_{22,2} + \frac{\bar{S}_{12}}{x_1} + \bar{p}_{,2} = \rho g \end{array} \right. ,$$

et l'équation d'incompressibilité se met sous la forme :

$$(6.13) \quad \bar{D}_{11} + \bar{D}_{22} + \bar{D}_{\Theta\Theta} = 0,$$

soit en fonction des vitesses, d'après (6.4) :

$$(6.14) \quad \bar{u}_{1,1} + \bar{u}_{2,2} + \frac{\bar{u}_1}{x_1} = 0.$$

Notons que, dans le cas général (glace non isotrope) et pour les deux types d'écoulement, la contrainte déviatoire normale au plan de l'écoulement n'est pas nulle (elle est déterminée par  $\bar{S}_{33} = -\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22}$ ).

### 6.2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont appliquées à la frontière du domaine  $\mathcal{D}$  de la calotte. Pour notre problème, nous pouvons distinguer quatre conditions aux limites différentes :

#### Surface

- Condition de surface libre pour la surface de la calotte  $E(x_1)$ , soit

$$(6.15) \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\sigma}^0 \mathbf{n} \quad \text{sur } E(x_1)$$

où  $\mathbf{n} = (\partial E / \partial x_1, -1, 0)$  est le vecteur normal à la surface  $E(x_1)$  et  $\bar{\sigma}^0$  la pression atmosphérique.

- Si nous faisons l'hypothèse que la surface libre est la surface d'équilibre de l'écoulement stationnaire, alors le taux d'accumulation  $b$  doit équilibrer la vitesse normale à la surface, soit :

$$(6.16) \quad b = -\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}.$$

#### Socle rocheux

- Condition d'adhérence pour la surface de contact entre la glace et le socle rocheux  $B(x_1)$ , soit :

$$(6.17) \quad \bar{\mathbf{u}}(x_1, B(x_1)) = \mathbf{0}.$$

#### Axe de symétrie

- Condition de symétrie par rapport au dôme en  $x_1 = 0$ , soit :

$$(6.18) \quad \bar{u}_1(0, x_2) = 0.$$

## 6.3 Méthodes numériques

### 6.3.1 Formulation variationnelle

Considérons, comme Meyssonier (1983), la fonctionnelle :

$$(6.19) \quad J(\bar{u}_i, \bar{p}) = \int_{\mathcal{D}} (\bar{\phi}_D + \bar{p} \bar{D}_{ii} - \rho g_i \bar{u}_i) \, d\mathcal{D} - \int_E \bar{\sigma}^0 \bar{u}_i n_i \, ds,$$

où  $\bar{\phi}_D$  est le potentiel de dissipation du polycristal orthotrope linéaire (6.1).

En utilisant (6.2), la variation linéarisée  $\delta J$  de  $J(\bar{u}_i, \bar{p})$ , obtenue pour des variations arbitraires  $\delta \bar{u}_i$  et  $\delta \bar{p}$  de  $\bar{u}_i$  et  $\bar{p}$ , s'exprime comme :

$$(6.20) \quad \delta J = \int_{\mathcal{D}} (\bar{S}_{ij} \delta \bar{D}_{ij} + \bar{p} \delta \bar{D}_{ii} + \delta \bar{p} \bar{D}_{ii} - \rho g_i \delta \bar{u}_i) \, d\mathcal{D} - \int_E \bar{\sigma}^0 \delta \bar{u}_i n_i \, ds.$$

Sachant que :

$$(6.21) \quad \delta \bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_i} \right),$$

l'utilisation de (6.8) et de la propriété de symétrie du tenseur des contraintes ( $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ji}$ ) conduit aux simplifications suivantes pour (6.20) :

$$(6.22) \quad \delta J = \int_{\mathcal{D}} (\bar{\sigma}_{ij} \delta \bar{u}_{i,j} + \delta \bar{p} \bar{D}_{ii} - \rho g_i \delta \bar{u}_i) d\mathcal{D} - \int_E \bar{\sigma}^0 \delta \bar{u}_i n_i ds.$$

L'intégration par partie selon  $x_j$  (théorème de Green-Ostrogradski) du terme  $\bar{\sigma}_{ij} \delta \bar{u}_{i,j}$  conduit à l'expression suivante :

$$(6.23) \quad \delta J = \int_{\mathcal{D}} (-\delta \bar{u}_i (\bar{\sigma}_{ij,j} + \rho g_i) + \delta \bar{p} \bar{D}_{ii}) d\mathcal{D} + \int_E \delta \bar{u}_i (\bar{\sigma}_{ij} n_j - \bar{\sigma}^0 n_i) ds.$$

Les variations  $\delta \bar{u}_i$  et  $\delta \bar{p}$  étant arbitraires, la nullité de  $\delta J$  entraîne la vérification des équations (6.5), (6.7) et de la condition aux limites (6.15).

La solution du problème consistant à chercher les champs de vitesses  $\bar{\mathbf{u}}$  et pressions  $\bar{p}$  vérifiant les équations d'équilibre quasi-statique (6.5) et d'incompressibilité (6.7), satisfaisant les conditions aux limites (6.15), (6.17) et (6.18), et dont la loi de comportement est définie par (6.1), est donnée par la stationnarité de  $J$  sur l'ensemble des champs de vitesses cinématiquement admissibles (c'est-à-dire vérifiant (6.17) et (6.18)).

### 6.3.2 Méthode des éléments finis

L'objectif de ce paragraphe n'est pas d'exposer en détail la méthode des éléments finis, mais de présenter les particularités propres à notre problème (pour plus de détail, voir par exemple Dhatt et Touzot, 1984).

La formulation exposée au paragraphe précédent conduit naturellement au choix des variables vitesses et pression pour résoudre le problème. Notons que cette méthode s'apparente à la méthode de pénalisation qui consiste à remplacer l'équation d'incompressibilité (6.7) par  $\bar{D}_{ii} = \alpha p$ , avec  $\alpha$  suffisamment petit (Meyssonnier, 1983).

Le code numérique développé par Meyssonnier (1983) est basé sur la formulation faible du problème énoncé au paragraphe 6.2 qui consiste à exprimer la stationnarité de la fonctionnelle (6.19), soit :

$$(6.24) \quad \delta J = 0.$$

Cette formulation est dite faible car l'écriture (6.24) suppose seulement que  $\bar{\mathbf{u}}$  est continue et à dérivée première continue par morceaux, tandis que l'équation de l'équilibre quasi-statique (6.5) fait intervenir les dérivées secondes de la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$ , qui est donc continue et à dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2.

Le principe de la méthode des éléments finis consiste à discrétiser le domaine d'étude complexe  $\mathcal{D}$  par un nombre fini d'éléments de forme géométrique simple. Sur chaque élément, les champs de vitesses et pressions sont représentés par des polynômes déterminés par leurs valeurs en certains points appelés nœuds.

Comme Meyssonnier (1983) nous utilisons des éléments triangulaires à 6 nœuds ( $T6$ ) avec une interpolation quadratique de la vitesse et linéaire de la pression, qui est donc déterminée uniquement aux nœuds sommets des triangles. La règle générale imposant à la pression d'être interpolée avec des polynômes de moindre degré que ceux utilisés pour la vitesse est donc respectée. La pression est soit supposée continue entre deux éléments

contigus, ce qui revient à exprimer l'incompressibilité en moyenne, soit discontinue, ce qui impose l'incompressibilité en tout point de chaque élément. Nous adoptons une pression continue car cette solution diminue le nombre d'inconnues nodales et semble conduire à une meilleure précision sur le champ de vitesses.

La loi de comportement macroscopique étant linéaire, l'équation (6.24) conduit à un système d'équations linéaires, dont les inconnues sont les valeurs nodales de vitesses et de pression, qui est résolu par la méthode de Gauss. La température et la fabrique (2 paramètres  $k_i$  et le paramètre d'orientation  $\varphi^o$ ) sont définies en chaque nœud du maillage. Dans ce chapitre, ce sont des données initiales du problème que nous ne faisons pas évoluer. Nous verrons plus loin les différents champs de températures et de fabriques adoptés.

### 6.3.3 Adimensionnement

Pour simplifier l'analyse nous travaillons avec des variables adimensionnées. Nous effectuons les calculs sur un maillage de hauteur  $\tilde{H}(x_1 = 0) = 1$ , le paramètre de la loi de Glen valant  $\tilde{B}_1(-10^\circ C) = 1$  et les forces de volumes  $\tilde{\rho g} = 1$ . Par conséquent, en utilisant ces notations, le symbole  $\tilde{\cdot}$  désignant les quantités adimensionnées, les autres variables adimensionnées sont définies dans le Tableau 6.1 à partir de  $H(x_1 = 0)$ ,  $B_1(-10^\circ C)$  et  $\rho g$ . Dans la suite, nous noterons  $B_1$  la valeur du paramètre de la loi de Glen à  $T = -10^\circ C$  et  $H_0$  la hauteur de la calotte en  $x_1 = 0$ .

Quantité	Dimension	Valeur adimensionnée
Longueur	$[m]$	$\tilde{x}_i = x_i/H_0$
Temps	$[a]$	$\tilde{t} = tB_1\rho gH_0$
Vitesse	$[ma^{-1}]$	$\tilde{u}_i = \bar{u}_i/(B_1\rho gH_0^2)$
Vitesse de déformation	$[a^{-1}]$	$\tilde{D}_{ij} = \bar{D}_{ij}/(B_1\rho gH_0)$
Contrainte	$[MPa]$	$\tilde{S}_{ij} = \bar{S}_{ij}/(\rho gH_0)$
Fluidité	$[MPa^{-1}a^{-1}]$	$\tilde{B}_1(T) = B_1(T)/B_1$
Forces volumiques	$[MPam^{-1}]$	$\tilde{\rho g} = 1$
Accumulation	$[ma^{-1} \text{ eq. glace}]$	$\tilde{b} = b/(B_1\rho gH_0^2)$

**Tab. 6.1:** Variables adimensionnées.

## 6.4 Géométrie de la calotte étudiée

### 6.4.1 Profil de Vialov (1958)

Nous adoptons dans la suite une géométrie de calotte simplifiée présentant un axe de symétrie  $x_1 = 0$  et un lit rocheux horizontal (*i.e.*  $B(x_1) = 0$  et  $E(x_1) = H(x_1)$ ). Vialov (1958) a proposé une solution analytique pour l'écoulement plan stationnaire de glace isotrope de ce type de calotte simplifiée. Les hypothèses et les calculs qui conduisent à l'équation de la surface et aux vitesses sont présentés dans l'**Annexe G**.

L'équation (G.5) obtenue en **Annexe G**, définissant le profil de la surface de Vialov (1958), s'écrit sous forme adimensionnée :

$$(6.25) \quad \tilde{H}^4 = 1 - 3\xi\tilde{b}\tilde{x}_1^2,$$

où  $\xi = 2$  pour l'écoulement plan et  $\xi = 1$  pour l'écoulement axisymétrique.

La calotte théorique que nous adoptons présente un rapport d'aspect  $\epsilon = H_0/L = 1.83 \cdot 10^{-2}$ , soit pour une hauteur au dôme  $H_0 = 1000m$ , une longueur de la calotte  $L = 54.5km$ .

#### 6.4.2 Le maillage

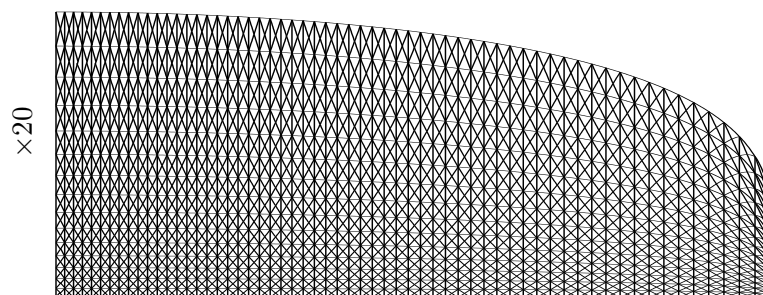
Le maillage est réalisé par nappes d'éléments rectangulaires composés de quatre triangles  $T6$  ( $4T6$ ) (*cf.* Figure 6.2). Le nombre de nœuds sur une verticale est donc constant. Pour l'écoulement plan, la présence d'un axe de symétrie en  $x_1 = 0$  permet de ne mailler que la moitié de la calotte ( $x_1 \geq 0$ ), comme pour l'écoulement axisymétrique.

Les quantités (vitesses, contraintes, ...) varient beaucoup plus lentement dans la direction horizontale que dans la direction verticale. Par conséquent, il est possible d'adopter une géométrie d'éléments dont la dimension horizontale est supérieure à la dimension verticale (*i.e.* éléments allongés). Cette démarche est justifiée dans le cas de notre problème car nous connaissons l'ordre de grandeur relatif des gradients verticaux et horizontaux des différentes quantités interpolées. Ceci revient en quelque sorte à faire une approximation du type de l'écoulement en couche mince, tout en gardant entier le système d'équations qui régit l'écoulement, l'avantage étant de pouvoir diminuer la dimension horizontale des éléments dans les zones où les quantités présentent les variations horizontales les plus importantes. Pour notre écoulement, ces zones sont le dôme ( $x_1 = 0$ ) et le bord de la calotte ( $x_1 = L$ ). Par ailleurs, la condition de vitesse nulle au contact du lit rocheux conduit à un gradient vertical de vitesses plus élevé dans la zone proche du lit rocheux que vers la surface libre. Par conséquent, le maillage est affiné dans le sens horizontal dans la zone proche de l'axe du dôme et dans le sens vertical dans la zone proche du lit rocheux.

Un maillage est caractérisé par les nombres de bandes de  $4T6$  horizontales  $N_{b1}$  et verticales  $N_{b2}$ . Le nombre de nœuds est  $N_d = 8N_{b1}N_{b2} + 2(N_{b1} + N_{b2}) + 1$  et le nombre d'éléments  $T6$  est  $N_{el} = 4N_{b1}N_{b2}$ . La progression de la taille des éléments  $4T6$  est définie par une suite géométrique de raison  $r_1$  pour l'horizontale et  $r_2$  pour la verticale, l'élément de base étant pris dans le coin défini par l'intersection de l'axe du dôme et du lit rocheux.

Nous avons réalisé des tests numériques en fixant  $N_{b1} = 60$  et  $N_{b2} = 10$ , soit  $N_d = 4941$ , pour mesurer l'influence des raisons  $r_1$  et  $r_2$  sur le champ des vitesses. La glace est supposée isotrope et isotherme lors de ces tests. Les résultats sont comparés à une solution dite "de référence" obtenue avec un maillage contenant beaucoup plus de nœuds ( $N_{b1} = 80$ ,  $N_{b2} = 15$ , soit  $N_d = 9791$ ) mais dont la taille des éléments ne varie pas (*i.e.*  $r_1 = r_2 = 1$ ). L'objectif est d'obtenir avec le maillage contenant le moins de nœuds possible un champ de vitesses le plus proche possible de la solution "de référence", en jouant sur la valeur des raisons  $r_1$  et  $r_2$ .

Dans le sens horizontal, si  $r_1 = 1$ , le calcul des vitesses est moins bon au voisinage de l'axe, mais si  $r_1$  est trop grand ( $r_1 > 1.03$ ) le maillage devient vraiment trop lâche pour



**Fig. 6.2 :** Exemple de maillage lorsque  $N_{b1} = 60$ ,  $N_{b2} = 15$ ,  $r_1 = 1.1$  et  $r_2 = 1.1$ . L'échelle selon la verticale est 20 fois supérieure à celle selon l'horizontale. On peut observer la progression de la taille des éléments selon l'horizontale et la verticale.

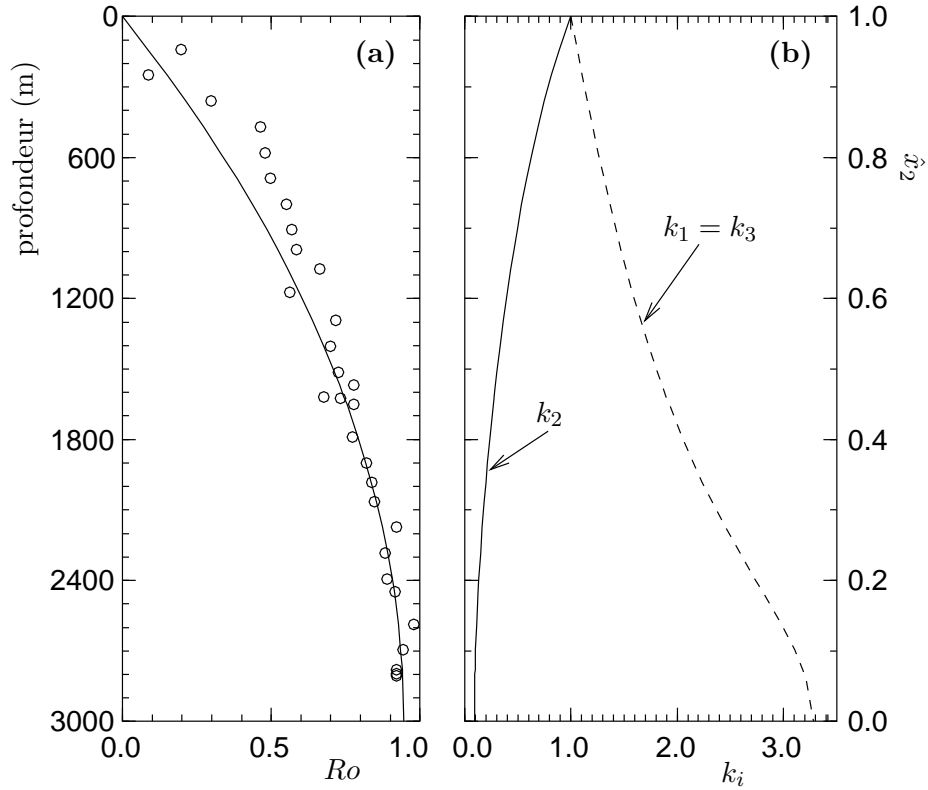
représenter correctement les variations de vitesses au front (à droite sur la Figure 6.2). Une valeur  $r_1 = 1.01$  semble convenir pour satisfaire, "au mieux", à ces deux conditions.

Il est possible d'adopter une valeur supérieure à  $r_1 = 1.01$  pour  $r_2$  selon la verticale puisque le nombre de bandes est moins important que selon l'horizontale ( $N_{b2} < N_{b1}$ ). Les tests que nous avons effectués montrent qu'une valeur  $r_2 = 1.1$  n'affecte pas trop l'approximation des vitesses en surface et améliore notablement le calcul des vitesses aux nœuds proches du lit rocheux.

Au bord de la calotte, en  $x_1 = L$ , la présence d'un point d'arrêt peut conduire à des problèmes numériques. De plus, avec un maillage par bandes, comme la surface coupe le lit rocheux en ce point, tous les nœuds de la dernière verticale sont confondus. Pour ces raisons, le domaine est coupé légèrement avant le point d'arrêt ( $\approx 1\%$  de  $L$ ), de façon à créer un front vertical de l'ordre du tiers de la hauteur au dôme. Ceci ne change pas énormément le profil de la surface de Vialov (1958) qui se termine déjà par un front très raide (mais pas vertical).

La Figure 6.2 montre le maillage de la calotte théorique, de rapport d'aspect  $\epsilon = 0.018$ , lorsque  $N_{b1} = 60$ ,  $N_{b2} = 15$ ,  $r_1 = 1.01$  et  $r_2 = 1.1$ , soit un nombre total de nœuds  $N_d = 7351$  et d'éléments  $T6$   $N_{el} = 3600$ . On peut observer sur la Figure 6.2 la progression de la taille des éléments selon l'horizontale et la verticale.

Dans la suite, comme Mangeney (1996), nous nous intéressons principalement à la zone du dôme ( $x_1 < 20H_0$ ). Néanmoins, nous avons choisi de mailler complètement le domaine plutôt que d'influencer l'écoulement en imposant une condition de type cinématique en  $x_1 = 20H_0$  (Mangeney, 1996; Schott Hvidberg *et al.*, 1997). C'est pour cette raison que le maillage n'est pas affiné dans la zone du bord en  $x_1 = L$ . Pour avoir un champ de vitesses précis au niveau de cette zone, il faudrait procéder de la même manière que pour le dôme, ce qui augmenterait le nombre de nœuds.



**Fig. 6.3 :** (a) : Evolution de la concentration de la fabrique  $Ro$  en fonction de la profondeur dans le forage de GRIP : valeurs mesurées par Thorsteinsson *et al.*, 1997 (cercle) et fonction (6.27) adoptée (courbe). (b) : Evolution des paramètres  $k_i$  correspondants en fonction de la hauteur réduite  $\hat{x}_2$ .

## 6.5 Comparaison d'écoulements

### 6.5.1 Valeurs des paramètres de comparaison

Dans les paragraphes suivants, nous comparons les écoulements obtenus en faisant varier les paramètres d'entrées du modèle. Les différents champs imposés (fabriques, températures) sont définis ci-dessous. La recherche de la surface libre n'est pas effectuée. Nous comparons donc les écoulements qui sont stationnaires pour une même surface imposée, et par conséquent pour des taux d'accumulation différents.

#### 6.5.1.1 Définition du champ de fabriques "GRIP"

Comme Mangeney (1996), pour mettre en évidence l'effet de la fabrique, nous comparons les écoulements de glace isotrope ( $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  sur tout le domaine) et de glace anisotrope dont la fabrique est celle mesurée dans le forage de GRIP (Groenland).

Les fabriques observées dans le forage de GRIP sont présentées au paragraphe 5.3. La Figure 6.3a présente les valeurs de  $Ro$  mesurées par Thorsteinsson *et al.* (1997) en fonction de la profondeur dans le forage de GRIP, ainsi que la fonction polynomiale adoptée pour



décrire continûment l'évolution de  $Ro$ . En introduisant la hauteur réduite<sup>1</sup> définie par :

$$(6.26) \quad \hat{x}_2 = x_2/H(x_1),$$

l'évolution de  $Ro$  dans le forage de GRIP est bien décrite pour des profondeurs inférieures à 2800m par la forme suivante :

$$(6.27) \quad Ro(x_2) = 0.945(1 - \hat{x}_2^2),$$

où  $\hat{x}_2 = x_2/3003$  pour le forage de GRIP.

Dans notre modèle, la fabrique est définie à partir de l'ODF paramétrée (3.34). Pour une fabrique orthotrope de révolution autour de l'axe  $\mathbf{e}_2$ , d'après les résultats obtenus au paragraphe 3.5.2, les paramètres de l'ODF donnée par (3.34) vérifient les relations  $k_1 = k_3$  et  $\varphi^o = 0$ . En introduisant dans (5.14) les expressions de l'ODF paramétrée (3.34) et de  $\mathbf{c}$  donnée par (3.2), il vient la relation suivante, donnant l'expression des paramètres  $k_i$  en fonction du degré d'orientation  $Ro$  :

$$(6.28) \quad k_1^{-2} = k_3^{-2} = k_2 = \left( \frac{1 - Ro}{1 + Ro} \right)^{2/3}.$$

En reportant la valeur observée de  $Ro$  ajustée selon l'expression (6.27) dans l'équation (6.28), nous obtenons l'évolution des paramètres  $k_i$  en fonction de la hauteur réduite  $\hat{x}_2$  pour le forage de GRIP. Cette évolution est donnée sur la Figure 6.3b.

Dans la suite, à défaut de connaître le champ (selon  $x_1$  et  $x_2$ ) de fabriques réel, nous faisons, comme Mangeney (1996) l'hypothèse que l'évolution des paramètres  $k_i$  est uniquement fonction de la hauteur réduite  $\hat{x}_2$ , en tout point du domaine.

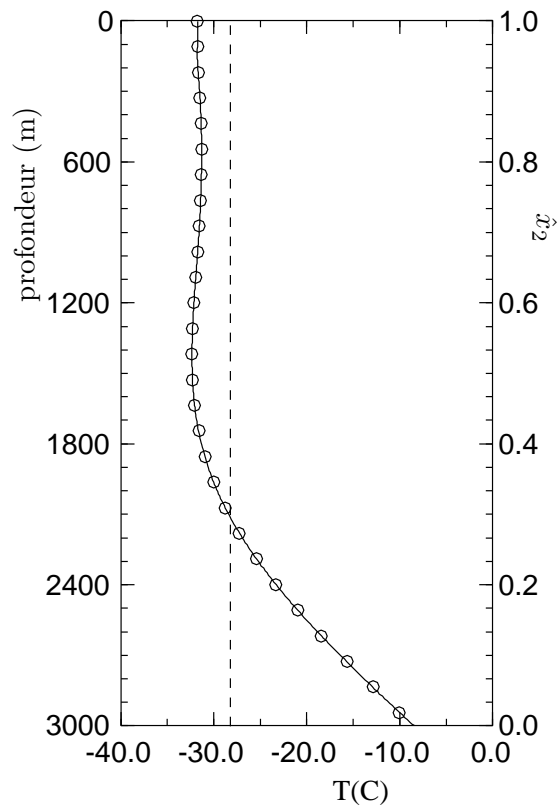
Cette hypothèse est discutable puisque la forme des fabriques de GRIP est probablement fortement dépendante du fait que le forage est localisé à un dôme. Néanmoins, elle va nous permettre de quantifier l'influence de l'anisotropie sur l'écoulement. Au **Chapitre 8**, nous calculerons le champ de fabriques, et donc les  $k_i(x_1, x_2)$  et  $\varphi^o(x_1, x_2)$ , compatible avec un écoulement stationnaire et pour la même géométrie de calotte.

### 6.5.1.2 Définition du champ de températures "GRIP"

De même que pour la fabrique, pour tester l'influence de la température sur l'écoulement, nous comparons l'écoulement isotherme à l'écoulement obtenu lorsque la température varie en fonction de la profondeur.

Le profil de température adopté est celui mesuré dans le forage de GRIP (Gundestrup *et al.*, 1993; The Greenland Summit Ice Cores CD-ROM, 1997). La Figure (6.4) présente l'évolution de la température mesurée dans le forage de GRIP en fonction de la profondeur et de la hauteur réduite  $\hat{x}_2$ , ainsi que son approximation par la fonction continue adoptée lors des essais numériques. La température, comme la fabrique, est supposée varier en fonction de la hauteur réduite  $\hat{x}_2$  de façon identique sur tout le domaine.

<sup>1</sup> A ne pas confondre avec la hauteur adimensionnée  $\tilde{x}_2 = x_2/H_0$ .



**Fig. 6.4 :** Evolution de la température en fonction de la profondeur (gauche) et de la hauteur réduite  $\hat{x}_2$  (droite) dans le forage de GRIP : valeurs mesurées d'après Gundestrup et al. (1993) (cercle) et fonction continue adoptée (courbe). La courbe tiretée représente la valeur moyenne  $T = -27.9^\circ\text{C}$ .

### 6.5.1.3 Différents comportements de grain

Pour un essai donné, le comportement du grain est identique sur tout le domaine. Pour tous les essais, la valeur de  $B_1 = B_1(-10^\circ C)$  est identique et nous faisons varier les paramètres microscopiques  $\beta$  et  $\gamma$ , la valeur de  $\psi$  étant déterminée en utilisant la relation (4.27). Pour une température  $T$ , la valeur de la fluidité  $B_1(T)$  est donnée par la relation (1.4), où l'énergie d'activation vaut  $Q = 78 \text{ kJmol}^{-1}$ .

### 6.5.1.4 Différents types d'écoulement

Nous comparons les écoulements plan (déformations planes) et axisymétrique.

### 6.5.1.5 Caractérisation d'un écoulement

Le Tableau 6.2 présente les différentes valeurs que peuvent prendre les entrées du modèle. Pour caractériser un essai, nous utilisons la notation suivante {Type d'écoulement, Paramètres du grain, Fabrique, Température} où les différents paramètres sont définis dans le Tableau 6.2. Par exemple,  $\{AXI, Gr2, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$  signifie que l'écoulement est axisymétrique, le comportement du grain est  $Gr2$  ( $\beta = 0.01$  et  $\gamma = 1.0$ ), le champ de fabriques est "GRIP", et le champ de températures est isotherme avec  $T = -27.9^\circ C$ .

Type d'écoulement	Déformations planes			Axisymétrique		
	$DP$			$AXI$		
Grain	$\beta$	0.1	0.01	0.3	0.1	0.1
	$\gamma$	1.0	1.0	1.0	0.7	3.5
	Code	$Gr1$	$Gr2$	$Gr3$	$Gr4$	$Gr5$
Fabrique	Isotrope			"GRIP"		
	$F_{ISO}$			$F_{GRIP}$		
Température	Isotherme			"GRIP"		
	$T_{T^\circ C}$			$T_{GRIP}$		

**Tab. 6.2:** Caractérisation d'un écoulement.

Dans les paragraphes suivants, nous comparons les résultats à l'écoulement de référence  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$ . Nous étudions successivement l'effet du comportement du grain, de la fabrique, de la température et du type d'écoulement (déformations planes ou axisymétrique). Nous nous limitons à la comparaison des vitesses en surface (vitesse horizontale et accumulation) et à celle des profils verticaux de vitesses. Une analyse plus détaillée des champs de contraintes et vitesses de déformation sera faite au **Chapitre 8** sur les écoulements obtenus par la méthode couplée.

## 6.5.2 Influence de la fabrique

Pour mettre en évidence l'influence de la fabrique sur l'écoulement, nous comparons les écoulements  $\{DP, Gr1, F_{ISO}, T_{-27.9}\}$  et  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$  (cf. Tableau 6.2

pour la définition des notations).

La Figure 6.5 compare les vitesses adimensionnées horizontales (a et c) et verticales (b et d) pour les écoulements à fabrique "GRIP" (trait plein) et à fabrique isotrope (tirets). En accord avec les résultats obtenus par Mangeney (1996), l'écoulement de glace anisotrope (GRIP) est approximativement deux fois plus rapide que l'écoulement de glace isotrope. Nos résultats diffèrent cependant puisque nous n'avons pas adopté la même surface ni le même comportement de grain (le comportement du grain du modèle de Mangeney (1996) est tel que  $\beta = 0$ ).

Pour quantifier l'influence du champ de fabriques "GRIP" sur la forme des profils verticaux de vitesses, nous avons tracé sur la Figure 6.5c (pointillés) le profil vertical de vitesse horizontale pour la glace isotrope tel que la vitesse en surface soit égale à celle obtenue avec la glace anisotrope. Ceci revient à multiplier le champ de vitesses de la glace isotrope par 1.8. La comparaison de cette courbe avec celle de l'écoulement anisotrope montre que, au voisinage du lit rocheux, le gradient de déformation horizontale est plus important avec le champ de fabriques "GRIP" qu'avec le champ isotrope. La forme particulière du champ de fabriques "GRIP" imposé, entraîne une augmentation progressive en fonction de la profondeur de la fluidité en cisaillement parallèlement à l'axe horizontal. Par conséquent, la glace profonde est approximativement 2.17 fois plus facile à cisailier que celle de surface (valeur de  $\psi/B_1$  pour  $\beta = 0.1$  et  $\gamma = 1.0$ ), d'où la différence entre la courbe pleine et celle en pointillés sur la Figure 6.5c.

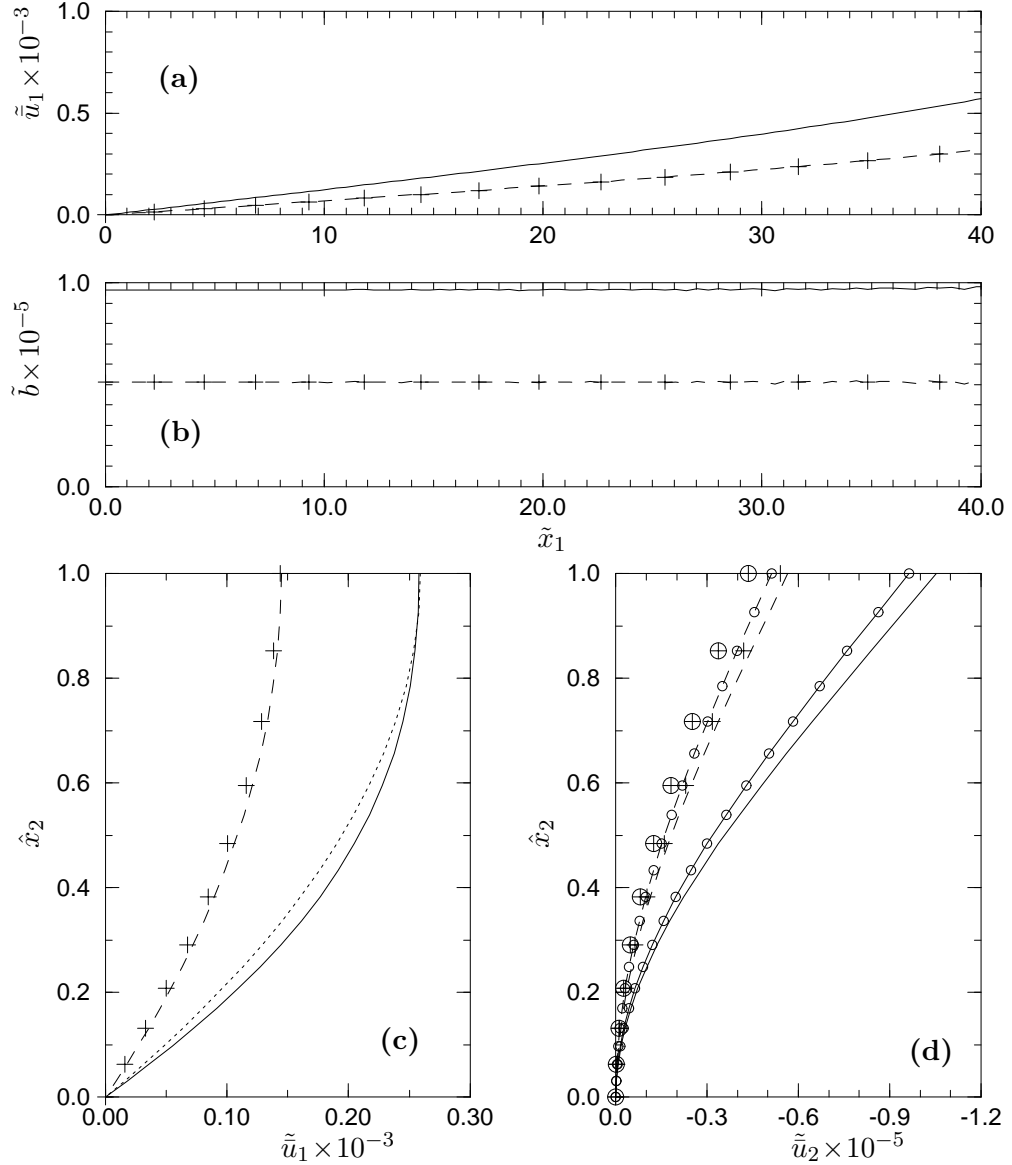
Notons que la solution analytique de Vialov (1958) (représentée par les symboles + sur la Figure 6.5) donne une bonne approximation des champs de vitesses pour l'écoulement isotrope isotherme, même si le rapport d'aspect de notre calotte est supérieur à la valeur adoptée en général pour faire cette approximation (soit  $\epsilon = 10^{-3}$  Hutter, 1993; Ritz, 1992). Néanmoins, l'observation des profils verticaux de vitesses indique que cette solution sous évalue les vitesses verticales de l'ordre de 5% en  $\tilde{x}_1 = 20$  et de 15% en  $\tilde{x}_1 = 0$  (écart maximum), par rapport à la solution donnée par la méthode des éléments finis. Ceci confirme que l'approximation de la couche mince à l'ordre 0 est d'autant moins bonne que l'on se rapproche de l'axe de symétrie de la calotte où les gradients horizontaux des vitesses ne sont plus négligeables par rapport aux gradients verticaux.

### 6.5.3 Influence de la température

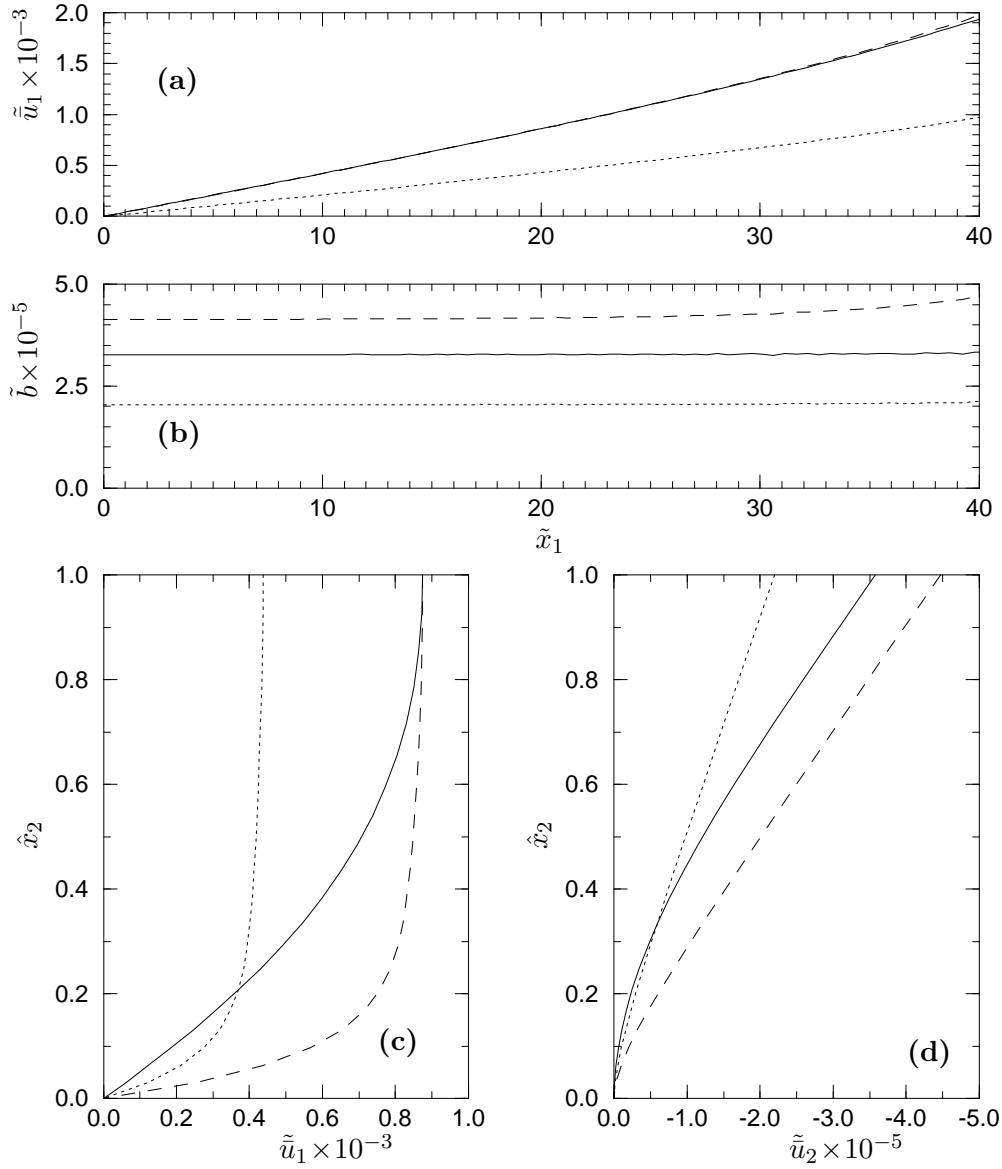
Pour mettre en évidence l'influence de la température sur l'écoulement, nous comparons les écoulements  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-19.8}\}$  et  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{GRIP}\}$  (cf. Tableau 6.2 pour la définition des notations).

La température dans le forage de GRIP croît de  $-31.7^\circ C$  en surface à  $-8.4^\circ C$  au contact du lit rocheux, soit une variation de  $23.3^\circ C$ . La relation (1.4) donnant la dépendance du paramètre de la loi de Glen  $B_1$  à la température montre que la fluidité de la glace isotrope  $B_1(T)$  à  $-8.4^\circ C$  est approximativement trente fois plus grande que celle à  $-31.7^\circ C$ .

Selon les résultats de Pimienta *et al.* (1987), la fluidité en cisaillement d'un polycristal dont tous les axes  $-c$  ont la même orientation est environ dix fois celle de la glace isotrope à la même température. Avec le modèle à contraintes homogènes ce rapport vaut au maximum 2.5. Par conséquent, la différence de comportement due à la variation de température entre les glaces de surface et les glaces profondes va influencer le champ



**Fig. 6.5 :** Influence de la fabrique. Comparaison des profils de vitesses pour les écoulements  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$  (trait plein) et  $\{DP, Gr1, F_{ISO}, T_{-27.9}\}$  (tirets). (a) : vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en surface ; (b) : accumulation  $\tilde{b}$  en surface ; (c) : profil de vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en  $\tilde{x}_1 = 20$  ; (d) : profil de vitesse verticale  $\tilde{u}_2$  en  $\tilde{x}_1 = 0$  (courbe et  $\circ$ ) et  $\tilde{x}_1 = 20$  (courbe seule). Sur chaque graphe la solution analytique de Vialov (1958) pour l'écoulement 2D isotrope isotherme (G.6) est représentée par les +. Sur le graphe (c) est représenté par des pointillés le profil de vitesse de la glace isotrope tel que la vitesse horizontale en surface soit égale à celle de l'écoulement anisotrope.



**Fig. 6.6 :** Influence de la température. Comparaison des profils de vitesse pour les écoulements  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-19.8}\}$  (trait plein) et  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{GRIP}\}$  (tirets). Les pointillés représentent les vitesses pour l'écoulement  $\{DP, Gr1, F_{ISO}, T_{GRIP}\}$ . (a) : vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en surface ; (b) : accumulation  $b$  en surface ; (c) : profil de vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en  $\tilde{x}_1 = 20$  ; (d) : profil de vitesse verticale  $\tilde{u}_2$  en  $\tilde{x}_1 = 20$ .

de vitesses de façon certainement plus visible que l'effet de la fabrique sur une glace isotherme.

Pour faire la comparaison, la température du champ isotherme est prise égale à  $T = -19.8^\circ\text{C}$ . Cette valeur est choisie de façon à obtenir la même vitesse horizontale en surface en  $\tilde{x}_1 = 20$  pour les écoulements isotherme et à température "GRIP" (cf. Figure 6.4).

Sur la Figure 6.6 est tracé (pointillés) le champ de vitesses obtenu pour une fabrique isotrope et le champ de températures "GRIP". Cet écoulement (pointillés) est globalement moins rapide que celui anisotrope isotherme (trait plein), même si près du lit rocheux les vitesses sont supérieures pour l'écoulement isotrope à température "GRIP".

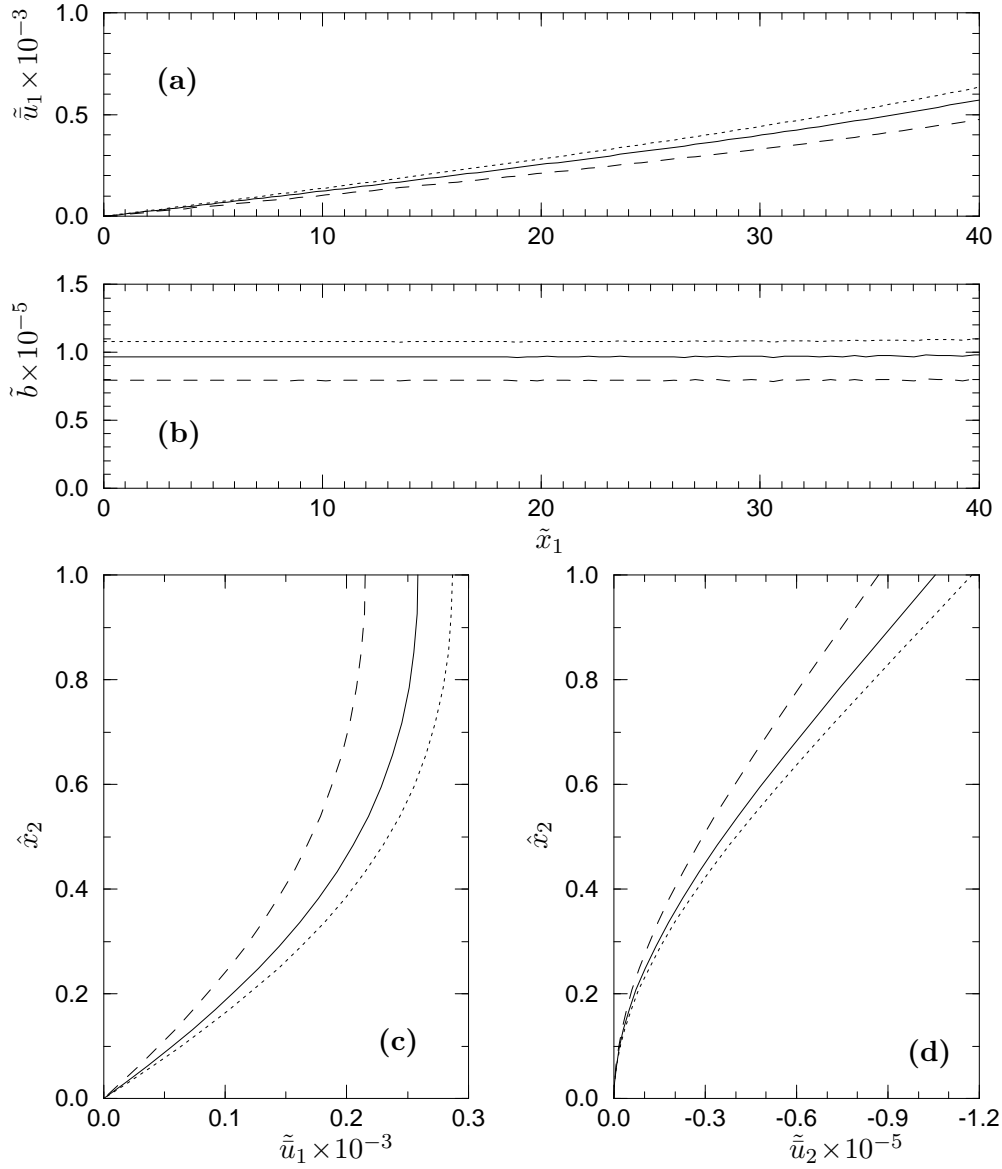
La Figure 6.6c montre l'influence du champ de températures sur la forme du profil vertical de vitesse horizontale. Nous observons, en  $\tilde{x}_1 = 20$ , que la glace est cisailée sur une bande d'épaisseur  $0.2H$  pour l'écoulement à température "GRIP", tandis que cette bande est de  $0.8H$  pour l'écoulement isotherme. La comparaison des vitesses horizontales en  $\tilde{x}_1 = 20$  pour les écoulements à température "GRIP" montre que la vitesse de l'écoulement anisotrope est deux fois supérieure à celle de l'écoulement isotrope. Cette valeur est à comparer à celle de 1.8 obtenue lorsque le champ de températures est isotherme. Ceci montre qu'un champ de températures variable en fonction de la profondeur, tel que celui de GRIP, augmente l'effet de l'anisotropie par rapport à un champ isotherme, en concentrant la déformation dans les zones profondes chaudes où la fabrique est concentrée.

#### 6.5.4 Influence du comportement du grain

Pour mettre en évidence l'influence du comportement du grain, nous étudions séparément l'influence de  $\beta$  et  $\gamma$ . Nous rappelons que tous les écoulements sont calculés pour une même valeur de  $B_1$ , la valeur de  $\psi$  étant calculée par (4.27) pour chaque couple  $(\beta, \gamma)$ . Pour étudier l'influence de  $\beta$ , nous comparons les écoulements  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$ ,  $\{DP, Gr2, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$  et  $\{DP, Gr3, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$ , puis pour celle de  $\gamma$  les écoulements  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$ ,  $\{DP, Gr4, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$  et  $\{DP, Gr5, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$  (cf. Tableau 6.2 pour la définition des notations). Le lecteur se reportera au paragraphe 2.2.1 pour la définition des paramètres du grain  $\beta$  et  $\gamma$ .

La Figure 6.7 montre l'influence du paramètre  $\beta$  sur l'écoulement de la calotte polaire. Pour le grain,  $\beta$  est le rapport entre la fluidité en cisaillement dans le plan de base et celle parallèle au plan de base. Nous avons vu que, pour une même valeur de  $B_1$ , plus  $\beta$  est petit, plus la déformation du grain en cisaillement parallèlement au plan de base est aisée. Etant donné la forme particulière du champ de fabriques imposé (GRIP, *i.e.* concentration des axes- $c$  vers la verticale), nous obtenons une réponse similaire de la calotte polaire, *i.e.* plus  $\beta$  est petit plus l'écoulement de la calotte polaire est accéléré.

Le rapport des fluidités en cisaillement parallèlement au plan de base du grain,  $\psi$ , pour  $\beta = 0.01$  et  $\beta = 0.3$  vaut  $\psi_{(\beta=0.01)}/\psi_{(\beta=0.3)} = 1.43$ . Pour la calotte polaire, le rapport entre les vitesses en surface en  $\tilde{x}_1 = 20$  pour  $\beta = 0.01$  et  $\beta = 0.3$  est de l'ordre de 1.35. La valeur 1.43 correspond à la valeur maximum qui serait atteinte pour une nappe infinie d'épaisseur uniforme soumise à un cisaillement simple et dont tous les grains auraient exactement la même orientation verticale. Dans notre application, aucune de ces conditions n'est remplie et il est donc logique de trouver un rapport des vitesses de



**Fig. 6.7 :** Influence du paramètre  $\beta$ . Comparaison des profils de vitesse pour  $\gamma = 1.0$  et  $\beta = 0.01$  (pointillés),  $\beta = 0.1$  (trait plein) et  $\beta = 0.3$  (tirets). **(a)** : vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en surface ; **(b)** : accumulation  $b$  en surface ; **(c)** : profil de vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en  $\tilde{x}_1 = 20$  ; **(d)** : profil de vitesse verticale  $\tilde{u}_2$  en  $\tilde{x}_1 = 20$ .



surface inférieur à 1.43.

Sur la Figure 6.8, nous observons que l'influence du paramètre microscopique  $\gamma$  est nettement moins importante que celle de  $\beta$ . Rappelons que  $\gamma$  représente le rapport entre les fluidités du grain en compression-traction selon une direction contenue dans le plan de base et selon la direction de l'axe  $-c$ .

Au paragraphe 5.2.2, nous avons montré que pour des essais de compression-traction sur un polycristal initialement isotrope, l'influence de  $\gamma$  était de la même importance que celle de  $\beta$ , voire supérieure. Or, au sein de la calotte polaire, au voisinage du lit rocheux où tous les axes  $-c$  des grains sont orientés verticalement, le mode de déformation est principalement un cisaillement parallèle à l'axe horizontal. Par conséquent, il est logique que l'influence de  $\gamma$  à l'échelle de la calotte polaire soit beaucoup moins marquée que celle de  $\beta$ .

Néanmoins, pour une même valeur de  $\beta$ , nous observons que plus  $\gamma$  est grand (*i.e.* plus le grain est facile à déformer en compression-traction selon une direction contenue dans le plan de base par rapport à la direction de l'axe  $-c$ ) plus l'écoulement de la calotte polaire est rapide. Une explication de ce résultat peut être donnée en observant que, pour des valeurs de  $B_1$  et  $\beta$  identiques, la fluidité en cisaillement  $\psi$ , donnée par (4.27), est d'autant plus importante que  $\gamma$  est grand. Par exemple, pour  $\beta = 0.1$ , le rapport  $\psi/B_1$  vaut 2.17 pour  $\gamma = 1.0$ , et 2.25 pour  $\gamma = 3.5$ . Par conséquent, puisque c'est au voisinage du lit rocheux, où la fabrique est concentrée, que la glace subit le plus de déformation, l'écoulement à l'échelle de la calotte polaire est d'autant plus rapide que  $\psi$  est grand, et donc que  $\gamma$  est grand.

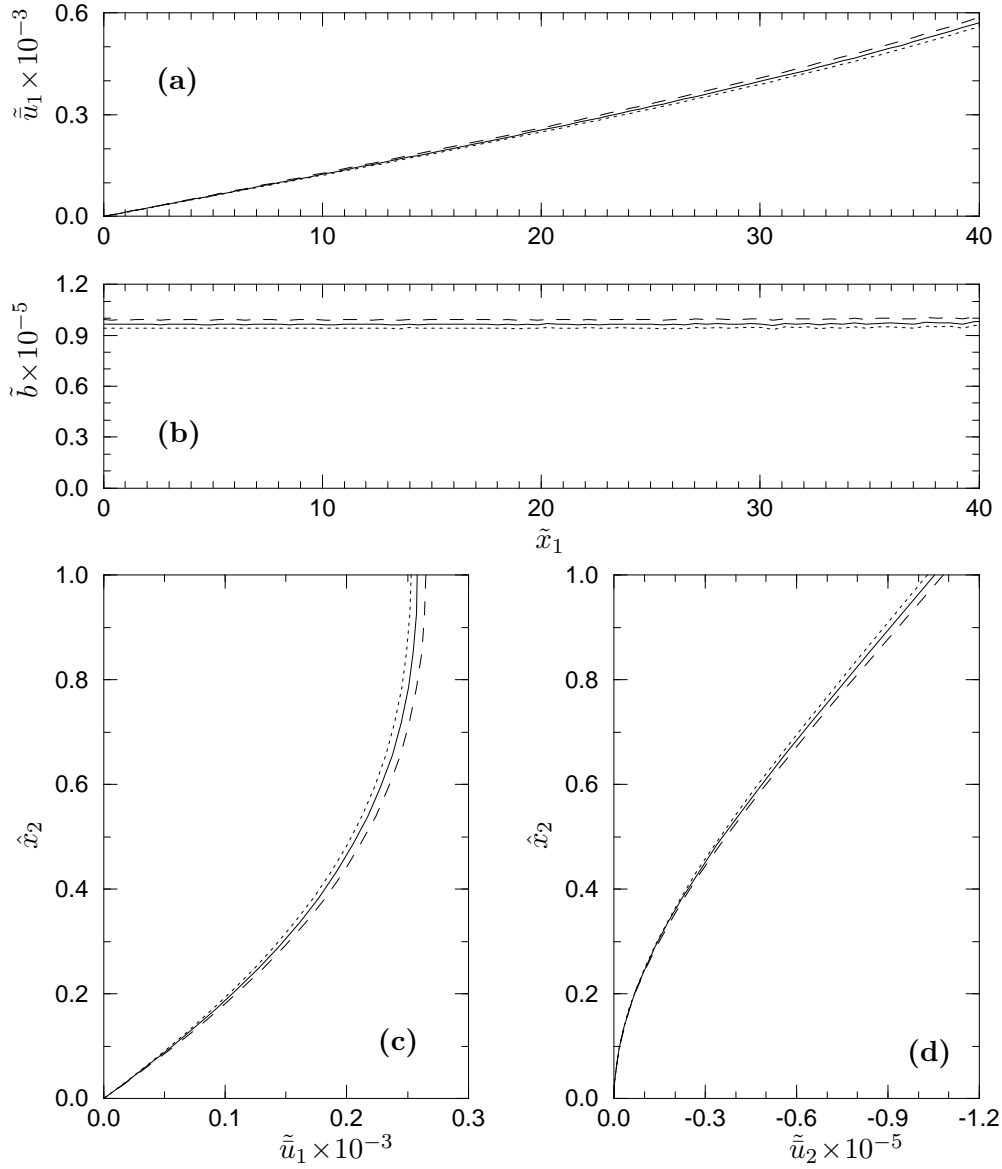
### 6.5.5 Influence du type d'écoulement

Pour mettre en évidence l'influence du type de l'écoulement nous comparons les écoulements  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-19.8}\}$  et  $\{AXI, Gr1, F_{GRIP}, T_{-19.8}\}$  (*cf.* Tableau 6.2 pour la définition des notations).

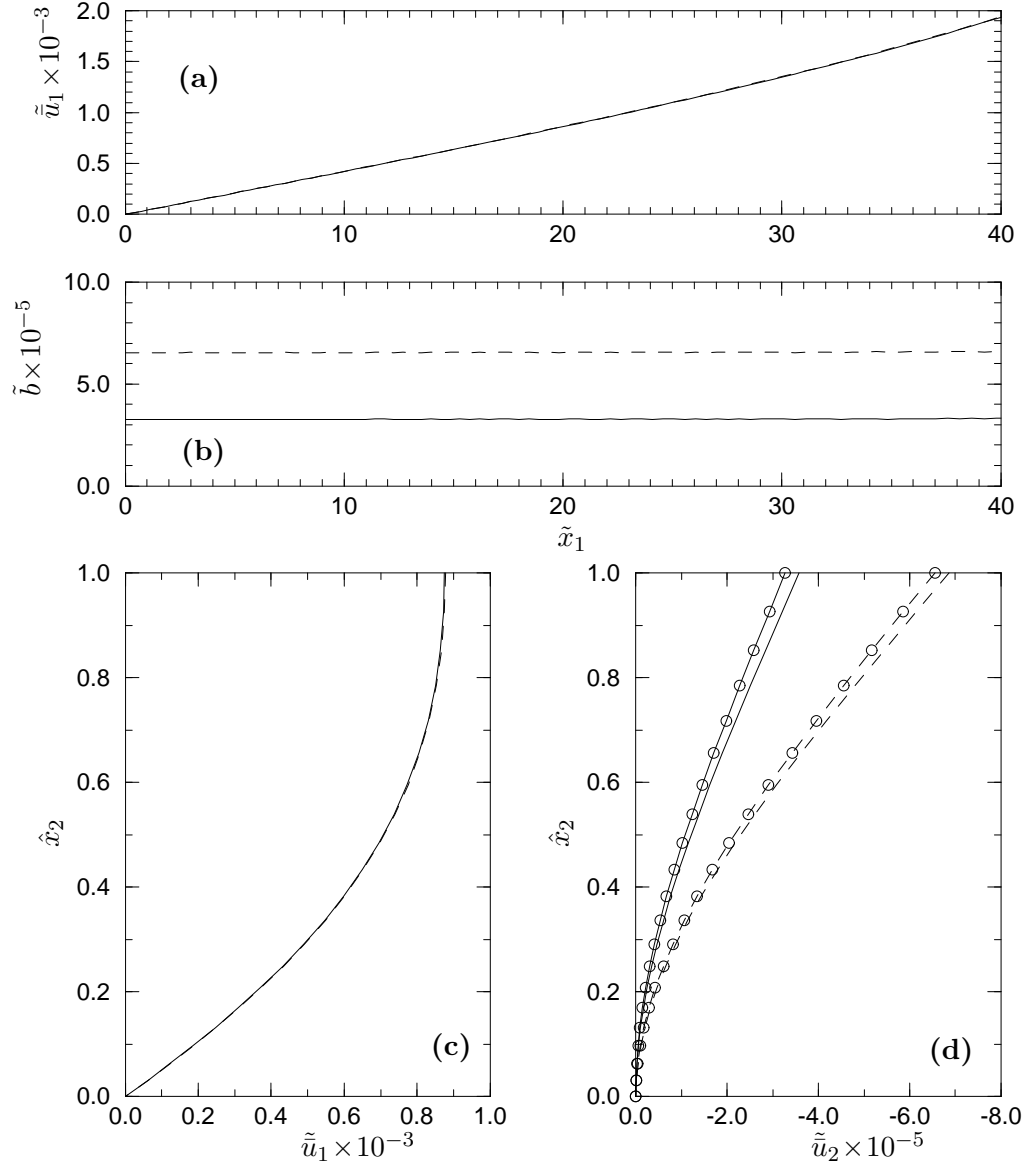
Les résultats analytiques présentés en **Annexe G** montrent que, dans l'hypothèse de la couche mince à l'ordre 0, pour une même surface et une glace isotrope, les écoulements plan et axisymétrique conduisent au même champ de vitesses horizontales. La Figure 6.9 indique que cette propriété est conservée pour l'écoulement de glace isotherme dont la fabrique est celle de GRIP. Nous avons aussi vérifié que cette propriété était conservée lorsque le champ de températures n'est pas isotherme.

De même que pour l'écoulement isotrope (*cf.* **Annexe G**), l'accumulation en surface nécessaire pour obtenir la stationnarité de la surface est deux fois plus importante pour l'écoulement axisymétrique que pour l'écoulement plan (*cf.* Figure 6.9b). Les vitesses verticales de l'écoulement axisymétrique sont approximativement deux fois supérieures à celles obtenues avec l'écoulement plan (2.0 en  $\tilde{x}_1 = 0$  et 1.92 en  $\tilde{x}_1 = 20$ ).

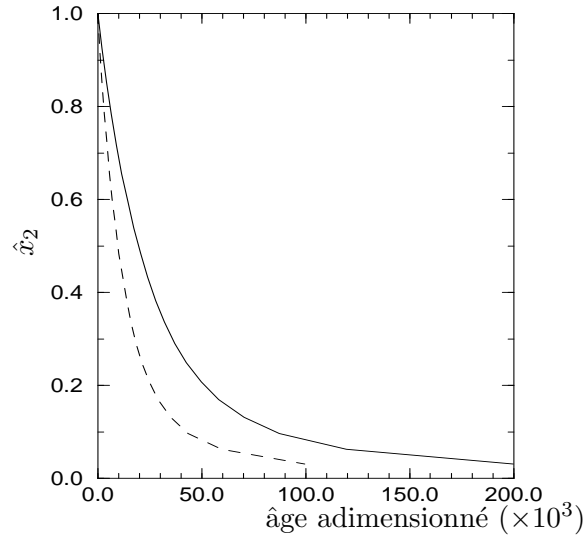
Pour illustrer l'influence du type de l'écoulement, nous avons tracé sur les Figure 6.10 et 6.11 l'évolution de l'âge en fonction de la profondeur en  $x_1 = 10$ , et les lignes de courant obtenues pour les deux types d'écoulement, respectivement. Pour une même profondeur, l'écoulement axisymétrique prévoit un âge de la glace deux fois plus jeune que l'écoulement plan, et les lignes de courant de l'écoulement axisymétrique descendent beaucoup plus profond que celles de l'écoulement plan. Ceci montre l'influence du choix du type de l'écoulement, sachant que les conditions d'un écoulement réel se situe entre ces



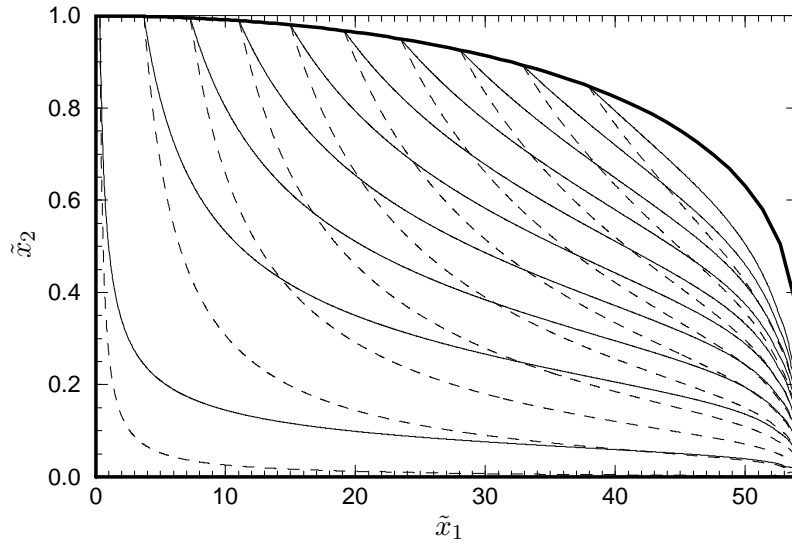
**Fig. 6.8 :** Influence du paramètre  $\gamma$ . Comparaison des profils de vitesse pour  $\beta = 0.1$  et  $\gamma = 0.7$  (pointillés),  $\gamma = 1.0$  (trait plein) et  $\gamma = 3.5$  (tirets). **(a)** : vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en surface ; **(b)** : accumulation  $\tilde{b}$  en surface ; **(c)** : profil de vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en  $\tilde{x}_1 = 20$  ; **(d)** : profil de vitesse verticale  $\tilde{u}_2$  en  $\tilde{x}_1 = 20$ .



**Fig. 6.9 :** Influence du type d'écoulement. Comparaison des profils de vitesse pour les écoulements  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-19.8}\}$  (trait plein) et  $\{AXI, Gr1, F_{GRIP}, T_{-19.8}\}$  (tirets). (a) : vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en surface ; (b) : accumulation  $b$  en surface ; (c) : profil de vitesse horizontale  $\tilde{u}_1$  en  $\tilde{x}_1 = 20$  ; (d) : profil de vitesse verticale  $\tilde{u}_2$  en  $\tilde{x}_1 = 0$  (courbe et  $\circ$ ) et en  $\tilde{x}_1 = 20$  (courbe seule).



**Fig. 6.10 :** Evolution de l'âge adimensionné en fonction de la hauteur réduite en  $x_1 = 10$  pour les écoulement plan (trait continu) et axisymétrique (tirets).



**Fig. 6.11 :** Lignes de courant obtenues pour les écoulement plan (trait continu) et axisymétrique (tirets). Le calcul des lignes de courant est expliqué dans le Chapitre suivant

deux types d'écoulement bidimensionnels. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus par Schott Hvidberg (1996).

Nous verrons dans le **Chapitre 8** que le type d'écoulement influence la forme des fabriques obtenues à la convergence du calcul couplé des vitesses et de la fabrique.

## 6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons posé les équations qui régissent l'écoulement, plan ou axisymétrique, de glace orthotrope. Nous avons formulé le problème sous forme variationnelle et posé les équations qui permettent sa résolution par la méthode des éléments finis.

En un point du domaine, le comportement local du polycristal de glace dépend de la fabrique (3 paramètres de l'ODF paramétrée (3.34)), de la température et du comportement microscopique du grain ( $\psi$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  supposés identiques sur tout le domaine).

Ensuite, nous avons réalisé une série de comparaisons avec pour objectif de quantifier l'influence de la fabrique, de la température, du comportement du grain et du type d'écoulement. Ces tests, réalisés pour une même surface libre supposée être la surface de l'écoulement stationnaire, montrent que :

- l'influence d'un champ de fabriques tel que celui observé à GRIP peut conduire, suivant le comportement du grain, à un écoulement deux fois plus rapide que celui de glace isotrope à la même température.
- cette accélération de l'écoulement est encore amplifiée lorsque la température n'est plus isotherme mais évolue en fonction de la profondeur comme la température observée à GRIP.
- l'écoulement est plus sensible au paramètre microscopique  $\beta$  qu'à  $\gamma$  pour une même valeur du paramètre de la glace isotrope  $B_1$ .
- le type d'écoulement (déformations planes ou axisymétrique) n'influence que le champ des vitesses verticales, avec des vitesses verticales pour l'écoulement axisymétrique approximativement deux fois supérieures à celles de l'écoulement plan.



## Chapitre 7

# Evolution de la fabrique pour un champ de vitesses donné

### 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous détaillons la méthode utilisée pour calculer la fabrique en tout point du domaine, pour un champ de vitesses donné, et en supposant le comportement du polycristal connu en tout point, et la fabrique de surface isotrope. Cette méthode utilise les lignes de courant de l'écoulement pour calculer l'évolution de la fabrique.

Ensuite, nous comparons les résultats des quatre méthodes d'évolution de la fabrique présentées au paragraphe 3.6, en calculant l'évolution de la fabrique le long d'une ligne de courant de la calotte polaire théorique utilisée au **Chapitre 6**. L'objectif de cette comparaison est de montrer que les résultats obtenus avec l'hypothèse implicite d'une fabrique orthotrope (*i.e.* en utilisant l'ODF paramétrée (3.34)) sont similaires à ceux où la fabrique est quelconque (*i.e.* soit en utilisant une description de la fabrique sous forme de grains discrets, soit avec l'ODF discrétisée).

Enfin, nous appliquons cette méthode à l'ensemble du domaine, en adoptant l'ODF paramétrée (3.34) comme modèle de représentation de la fabrique.

### 7.2 Evolution de la fabrique le long d'une ligne de courant

#### 7.2.1 Problème à résoudre

Le problème à résoudre est le suivant : "pour un domaine  $\mathcal{D}$ , connaissant le comportement du matériau, le champ de vitesses sur ce domaine et la fabrique sur les frontières où la matière entre (surface libre où la fabrique est isotrope), calculer le champ de fabriques stationnaire pour cet écoulement".

Notons que ceci ne revient pas à calculer le champ de fabriques pour l'écoulement stationnaire. La détermination des champs de vitesses et de fabriques correspondant à l'écoulement stationnaire pour une géométrie donnée est l'objet du **Chapitre 8**.

L'évolution de la fabrique est entièrement définie par l'équation de la conservation du nombre de grains (3.10), où les vitesses de rotation des grains  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  sont données par (3.43) dans le cas particulier d'écoulements plan ou axisymétrique. Les champs

des contraintes déviatoires  $\bar{S}_{11}$ ,  $\bar{S}_{22}$  et  $\bar{S}_{12}$  et le champ des vitesses de rotation  $\bar{W}_{12}$  apparaissant dans les équations (3.43) sont des données calculées par la méthode des éléments finis.

La condition de stationnarité  $\partial(f \sin \theta)/\partial t = 0$  implique que l'équation (3.10) se simplifie sous la forme suivante

$$(7.1) \quad \frac{\partial f \sin \theta}{\partial x_i} \bar{u}_i + \frac{\partial \dot{\theta} f \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\varphi} f \sin \theta}{\partial \varphi} = 0.$$

### 7.2.2 Méthode des lignes de courant

Comme nous avons utilisé la méthode des lignes de courant pour résoudre l'équation de la conservation de la masse dans le névé compressible (Gagliardini et Meyssonier, 1997), nous adoptons cette méthode pour résoudre l'équation de la conservation du nombre de grains pour les glaces anisotropes. Chastel *et al.* (1993) ont appliqué cette méthode pour modéliser l'évolution de la fabrique dans le manteau supérieur. La plupart des applications proposées dans la littérature utilisent une description sous forme de grains discrets pour la fabrique (Mathur *et al.*, 1990; Kocks *et al.*, 1991; Chastel *et al.*, 1993). Notons que la plupart des maillages restent de taille raisonnable (*i.e.* nombre de nœuds inférieur à 1000) mais que certaines applications sont tridimensionnelle (Beaudoin *et al.*, 1993)

La méthode des lignes de courant consiste à résoudre l'équation (7.1) en suivant le polycristal le long de sa trajectoire depuis la surface où la fabrique est connue. L'écoulement étant supposé stationnaire, les trajectoires et les lignes de courant sont confondues. C'est donc une méthode de type Lagrangienne où l'évolution de la fabrique est déterminée en suivant le polycristal dans son mouvement le long de sa trajectoire au sein de la calotte polaire.

En introduisant l'abscisse curviligne  $s$  le long de la ligne de courant, et  $\bar{u}_s$  la vitesse tangente à la ligne de courant, l'équation (7.1) se met sous la forme :

$$(7.2) \quad \frac{\partial f \sin \theta}{\partial s} \bar{u}_s + \frac{\partial \dot{\theta} f \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\varphi} f \sin \theta}{\partial \varphi} = 0.$$

D'un point de vue numérique, le champ de vitesses étant connu, la ligne de courant est calculée en résolvant le système d'équations :

$$(7.3) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \bar{u}_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \bar{u}_2 \end{array} \right. .$$

Ceci est réalisé par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, en utilisant le champ de vitesses donné par le calcul des éléments finis. Simultanément, l'équation (7.2) est résolue par une méthode de type implicite, dépendante du modèle de représentation de la fabrique. Nous avons présenté au paragraphe 3.6 quatre méthodes différentes pour résoudre l'équation de la conservation du nombre de grains : la première utilise le modèle de grains discrets, la seconde représente la fabrique à l'aide de l'ODF discrétisée sur la



sphère des orientations et les deux dernières méthodes sont basées sur l'utilisation de l'ODF paramétrée (3.34).

En remarquant que dans l'équation (7.2) le terme  $(\partial(f \sin \theta)/\partial s)\bar{u}_s$  peut être remplacé par  $\partial(f \sin \theta)/\partial t_s$ , où  $t_s$  mesure le temps qui s'écoule pour le polycristal depuis son départ en surface le long de sa ligne de courant, l'équation (7.2) est alors formellement identique à l'équation (3.17) résolue au paragraphe 3.6. Par conséquent, les quatre méthodes présentées au paragraphe 3.6 sont applicables directement à la résolution de l'évolution de la fabrique le long d'une ligne de courant. Dans le paragraphe suivant, nous comparons les évolutions de la fabrique le long d'une ligne de courant calculées par ces quatre méthodes.

### 7.2.3 Adimensionnement

Comme pour le calcul des vitesses, nous faisons le calcul de l'évolution de la fabrique sous forme adimensionnée.

En notant  $\tilde{\theta} = \dot{\theta}/(\rho g H_0 B_1)$  et  $\tilde{\varphi} = \dot{\varphi}/(\rho g H_0 B_1)$  et en utilisant le Tableau 6.1 pour adimensionner l'abscisse curviligne  $s$  et la vitesse  $\bar{u}_s$ , l'équation (7.2) est réécrite sous forme adimensionnelle, comme :

$$(7.4) \quad \frac{\partial f \sin \theta}{\partial \tilde{s}} \tilde{u}_s + \frac{\partial \tilde{\theta} f \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\varphi} f \sin \theta}{\partial \varphi} = 0.$$

Le fait d'obtenir la même équation sous forme adimensionnelle montre que le calcul de la fabrique en un point de l'espace des coordonnées adimensionnées de la ligne de courant, pour une famille de géométrie de calotte ayant le même rapport d'aspect  $\epsilon$  et un même champ de températures, ne dépend que des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  du grain. En particulier, le calcul d'évolution de la fabrique ne dépend pas de la valeur de  $B_1(-10^\circ)$ , ni de la valeur des forces de volume  $\rho g$ , ni de  $H_0$ .

## 7.3 Comparaison des quatre méthodes

### 7.3.1 Nombre de paramètres et temps de calcul

Le Tableau 7.1 présente les particularités propres à chacune des quatre méthodes d'évolution de la fabrique.

Le nombre de paramètres nécessaires à la description de la fabrique varie de 3 pour l'ODF paramétrée à 32400 lorsque la fabrique est décrite à l'aide de l'ODF discrétisée sur la sphère des orientations avec une discrétisation de  $1^\circ \times 1^\circ$ . Les deux dernières lignes du Tableau 7.1 comparent la durée du calcul de l'évolution de la fabrique de  $t$  à  $t + dt$  pour les quatre méthodes lorsque la fabrique à  $t$  est isotrope et très concentrée, respectivement. L'unité de temps utilisée correspond à environ  $10^{-4}s$  sur notre station de travail (HP9000-712/80).

Le temps de calcul des méthodes grains discrets et ODF discrétisée ne dépend pas de la fabrique, puisque la procédure de calcul est une boucle sur le nombre de grains et de "boîtes", respectivement. Il apparaît clairement que l'ODF discrétisée, tant par le nombre de données à gérer (boîtes) que par le temps de calcul, n'est pas du tout adaptée à notre problème.

Nom	Grains	ODF discrétisée	ODF paramétrée: Moindres carrés	ODF paramétrée: Méthode directe
Nombre de paramètres	882 grains	32400 "boîtes"	$k_2, k_3$ et $\varphi^o$	$k_2, k_3$ et $\varphi^o$
Type de fabrique	quelconque	quelconque	orthotrope	orthotrope
Temps (Fab. Iso.)	69	1800	274	1
Temps (Fab. concentrée)	69	1800	19650	5

**Tab. 7.1 :** Comparaison des quatre méthodes d'évolution de la fabrique. Les lignes 3 et 4 donnent le temps de calcul pour l'évolution pendant un pas de temps  $dt$  lorsque la fabrique à  $t$  est isotrope et très concentrée, respectivement.

Pour les deux méthodes utilisant l'ODF paramétrée (3.34), le temps de calcul d'un pas d'évolution de la fabrique dépend de la fabrique initiale. En effet, les deux méthodes conduisent à intégrer numériquement des fonctions à pic et la seule méthode fiable pour ce type d'intégration consiste à discrétiser de plus en plus finement les intervalles d'intégration. Par conséquent, plus la fabrique est concentrée, plus les pics sont marqués et plus le temps de calcul est long.

Pour limiter ce temps de calcul, nous imposons que le plus petit des paramètres de l'ODF paramétrée (3.34) ne peut pas dépasser une valeur limite inférieure  $k_{min} \approx 0.002$ , qui correspond à une fabrique où 99% des orientations des grains sont comprises dans un intervalle  $(d\theta, d\varphi)$  de  $2^\circ$  de rayon. La valeur donnée dans la dernière ligne du Tableau 7.1 correspond au temps maximum pour calculer la fabrique la plus concentrée. Enfin, lorsque la valeur minimum  $k_{min}$  est atteinte, le comportement du polycristal est supposé identique à celui d'un seul grain (ce qui conduit à ne plus faire l'intégration des intégrales  $J_{pq}$  données par (4.9) pour obtenir le comportement du polycristal de glace).

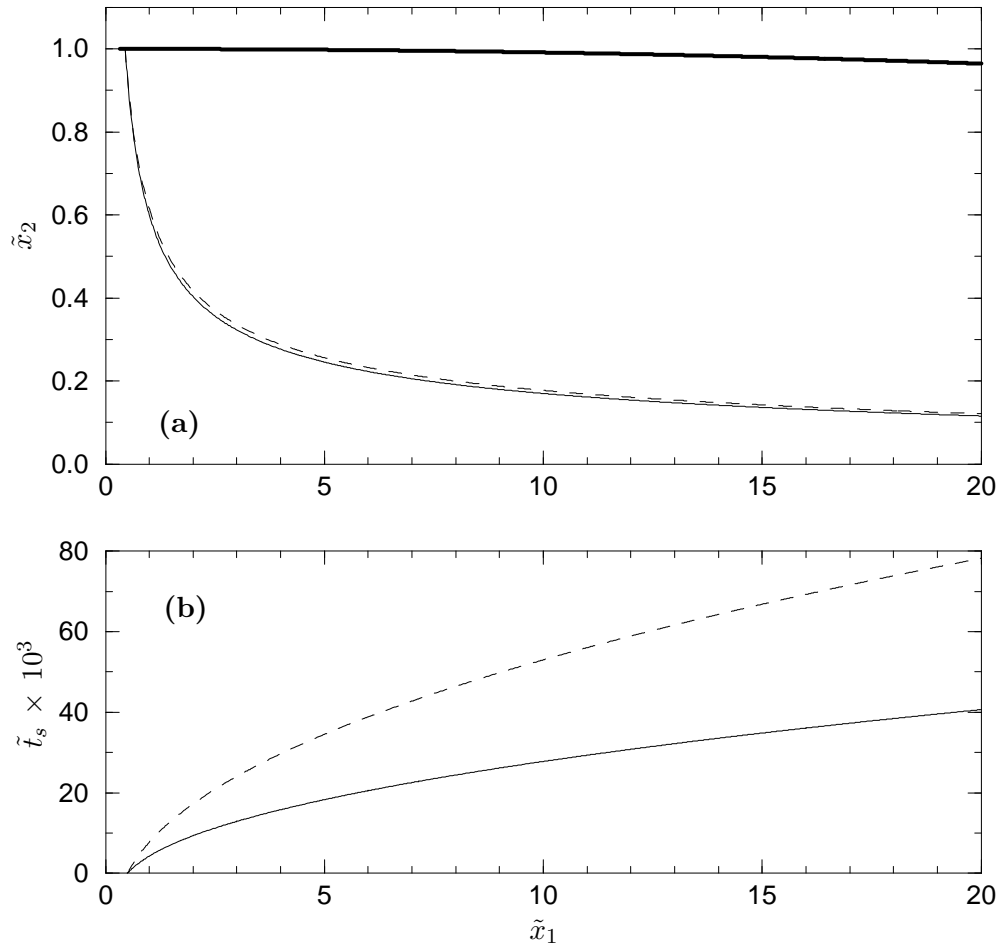
La comparaison des temps de calcul fait ressortir l'intérêt de la méthode de calcul directe utilisant l'ODF paramétrée (3.34), qui comme nous l'avons vu au paragraphe 3.6.3.2 ne nécessite que le calcul de la seule intégrale simple (3.54).

L'objectif des paragraphes suivants est de montrer qu'il est possible d'approcher les fabriques obtenues dans les calottes polaires par des fabriques orthotropes et par conséquent d'utiliser l'ODF paramétrée (3.34).

### 7.3.2 Principe de la comparaison

A partir du champ de vitesses calculé par la méthode des éléments finis, nous déterminons les contraintes  $\bar{S}_{11}$ ,  $\bar{S}_{22}$ ,  $\bar{S}_{12}$  et la vitesse de rotation  $\bar{W}_{12}$  le long de la ligne de courant issue du premier nœud situé sur la surface à droite du dôme (cf. Figure 7.1). Ensuite, nous comparons pour les quatre méthodes l'évolution de la fabrique, en imposant ces contraintes et vitesse de rotation.

Etant donné que nous utilisons trois modèles différents pour représenter la fabrique, la comparaison des fabriques en projection de Schmidt n'est ni simple ni précise. Pour



**Fig. 7.1** : Écoulements considérés pour la comparaison des méthodes de calcul de l'évolution de la fabrique. Les paramètres de l'écoulements sont ceux du paragraphe 6.5.2. Les deux écoulements utilisés pour faire la comparaison sont  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$  (trait continu) et  $\{DP, Gr1, F_{ISO}, T_{-27.9}\}$  (tirets). (a) : Lignes de courant utilisées pour le calcul de l'évolution de fabrique. (b) : Evolution du temps adimensionné  $\tilde{t}_s$  le long de la ligne de courant en fonction de  $\tilde{x}_1$ .

cette raison, nous ferons la comparaison sur l'évolution des propriétés mécaniques du polycristal induite par l'évolution de la fabrique, ce qui est plus objectif.

L'écoulement étant plan ou axisymétrique, le comportement du polycristal de glace est entièrement défini par

$$(7.5) \quad \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} \\ \bar{D}_{22} \\ 2\bar{D}_{12} \end{bmatrix} = B_1 \begin{bmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} & \tilde{F}_{13} \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} & \tilde{F}_{23} \\ \tilde{F}_{31} & \tilde{F}_{32} & \tilde{F}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{12} \end{bmatrix},$$

où les  $\tilde{F}_{ij}$  sont les fluidités adimensionnées macroscopiques dans le repère de référence  $\{R\}$ .

Notons que cette écriture particulière ne conduit pas forcément à une matrice  $\tilde{F}$  symétrique.

### 7.3.3 Validation de l'ODF paramétrée

Nous comparons l'évolution des  $\tilde{F}_{ij}$  pour chacune des quatre méthodes, le long d'une ligne de courant. Nous limitons l'étude à la zone proche du dôme ( $\tilde{x}_1 \leq 20$ ) puisque le maillage que nous avons adopté n'est pas suffisamment fin près du bord de la calotte pour espérer obtenir un champ de vitesses suffisamment précis dans cette zone.

La comparaison a été faite sur différents écoulements (déformations planes ou axisymétrique, isotrope ou anisotrope, isotherme ou non-isotherme et pour différents comportements de grain). Nous ne présenterons ici que les résultats obtenus avec les écoulements à fabrique isotrope  $\{DP, Gr1, F_{ISO}, T_{-27.9}\}$  et à fabrique "GRIP"  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$ , définis au paragraphe 6.5.2. Les comparaisons effectuées pour d'autres écoulements conduisent aux mêmes conclusions.

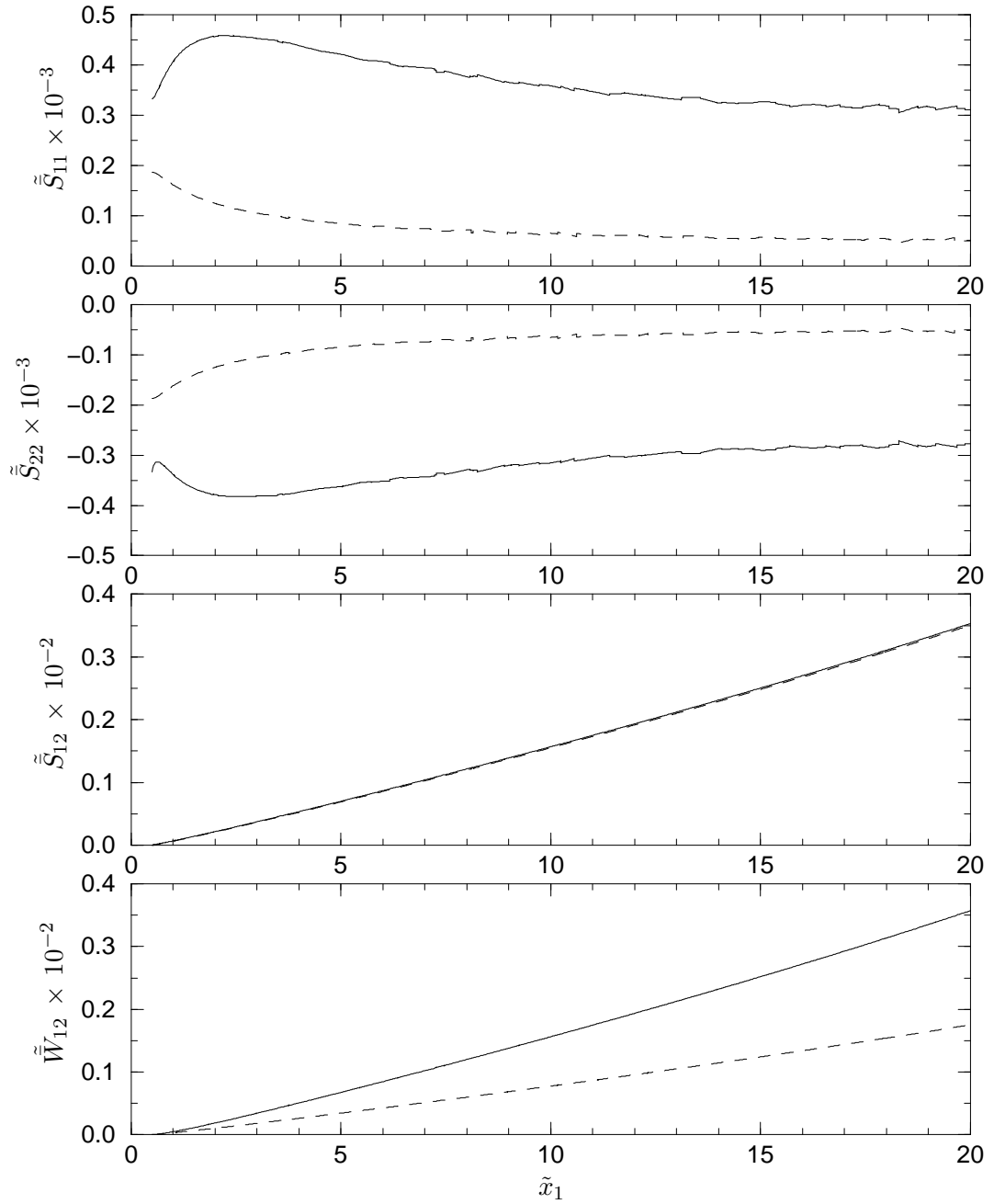
La Figure 7.1 montre les lignes de courant utilisées pour la comparaison et l'évolution du temps de trajet sur la ligne de courant, en fonction de l'abscisse adimensionnée  $\tilde{x}_1$ , pour les écoulements à fabrique isotrope et à fabrique "GRIP".

#### 7.3.3.1 Commentaires sur les écoulements

Sur la Figure 7.2 est tracée l'évolution des contraintes déviatoires  $\tilde{S}_{11}$ ,  $\tilde{S}_{22}$ ,  $\tilde{S}_{12}$  et de la vitesse de rotation  $\tilde{W}_{12}$  en fonction de  $\tilde{x}_1$ . Près de la surface, l'état de contrainte est une compression verticale ( $\tilde{S}_{22} < 0$ ), puis progressivement la contrainte de cisaillement augmente pour devenir supérieure aux contraintes déviatoires  $\tilde{S}_{11}$  et  $\tilde{S}_{22}$ .

Sur la Figure 7.1, nous pouvons vérifier que l'écoulement à fabrique "GRIP" est approximativement deux fois plus rapide que celui à fabrique isotrope. Par contre, comme Mangeney (1996), nous constatons que les deux lignes de courant sont très proches l'une de l'autre. La trajectoire des particules de glace est très peu modifiée par l'anisotropie.

Sur la Figure 7.2 nous pouvons remarquer que les écoulements à fabrique isotrope et "GRIP" conduisent à une évolution similaire de la contrainte de cisaillement  $\tilde{S}_{12}$  le long de la ligne de courant. Par contre, les contraintes déviatoires  $\tilde{S}_{11}$  et  $\tilde{S}_{22}$  du cas anisotrope sont supérieures en valeur absolue à celles du cas isotrope et ne suivent pas la même évolution. Notamment, nous vérifions que l'hypothèse de déformations planes entraîne  $\tilde{S}_{33} = 0$  pour le cas isotrope, ce qui n'est plus vrai pour l'écoulement à fabrique "GRIP".



**Fig. 7.2 :** Evolution des contraintes déviatoires adimensionnées  $\tilde{S}_{11}$ ,  $\tilde{S}_{22}$ ,  $\tilde{S}_{12}$  et de la vitesse de rotation adimensionnée  $\tilde{W}_{12}$  en fonction de  $\tilde{x}_1$  pour les écoulements avec fabrique "GRIP" (trait plein) et fabrique isotrope (tirets).

On a vu au paragraphe 6.5.2 que la vitesse horizontale en surface du cas anisotrope est approximativement le double de celle du cas isotrope. Les vitesses horizontales étant nulles au contact du lit rocheux et les variations horizontales étant négligeables par rapport aux variations verticales, il est logique d'obtenir une vitesse de rotation  $\tilde{W}_{12}$  pour l'écoulement anisotrope approximativement deux fois supérieure à celle du cas isotrope.

Tous ces résultats concernant la différence entre les écoulements isotrope et anisotrope sont en accord avec ceux obtenus par Mangeney *et al.* (1996).

### 7.3.3.2 Comparaison de l'évolution du comportement

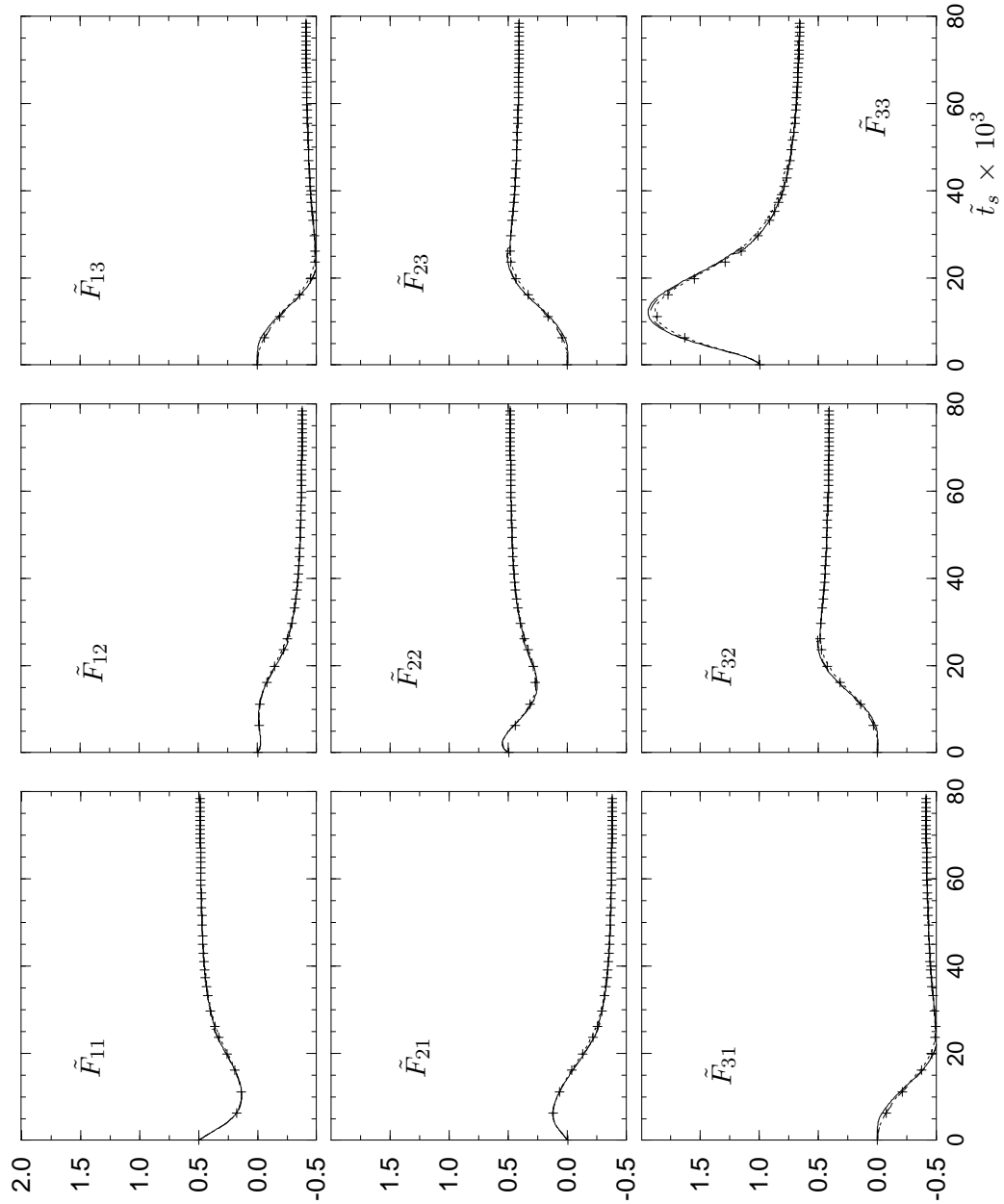
Les Figures 7.3 et 7.4 montrent l'évolution des fluidités adimensionnées  $\tilde{F}_{ij}$  définies par (7.5), en fonction du temps  $\tilde{t}_s$  le long de la ligne de courant. On constate un relativement bon accord entre les résultats obtenus avec les quatre méthodes. Les deux méthodes utilisant l'ODF paramétrée sont très proches puisque la différence relative sur les fluidités  $\tilde{F}_{ij}$  est inférieure à 1%.

La Figure 7.5 présente, pour les deux écoulements, l'évolution de l'erreur relative sur  $\tilde{F}_{11}$ ,  $\tilde{F}_{22}$  et  $\tilde{F}_{33}$  de la solution obtenue avec la méthode directe de l'ODF paramétrée (3.34), par rapport à la méthode des grains discrets. Il apparaît que l'erreur relative ne dépasse pas 1.5% pour le cas isotrope et 3.0% pour le cas anisotrope. Globalement, l'erreur relative augmente lorsque la fabrique se concentre, pour atteindre une valeur maximum lorsque le plus petit des paramètres de l'ODF paramétrée (3.34) atteint la valeur  $k_{min} = 0.002$ . Ensuite, pour l'ODF paramétrée, le comportement est calculé en supposant que tous les grains du polycristal ont la même orientation. Lors de ce changement, l'erreur relative devient nulle ce qui signifie que tous les grains ont effectivement la même orientation et que les méthodes directe de l'ODF paramétrée (3.34) et grains discrets conduisent à la même direction d'orientation du maximum de la fabrique. L'erreur relative observée avant que  $k_{min}$  ne soit atteint n'est donc pas la conséquence d'une différence d'orientation des maximums entre la méthode des grains discrets et la méthode directe de l'ODF paramétrée. Cette erreur relative est la conséquence de problèmes d'intégration numérique lors du calcul du comportement macroscopique du polycristal, et donc des  $\tilde{F}_{ij}$ , lorsque un des paramètres  $k_i$  devient très petit (intégration de fonction à pic).

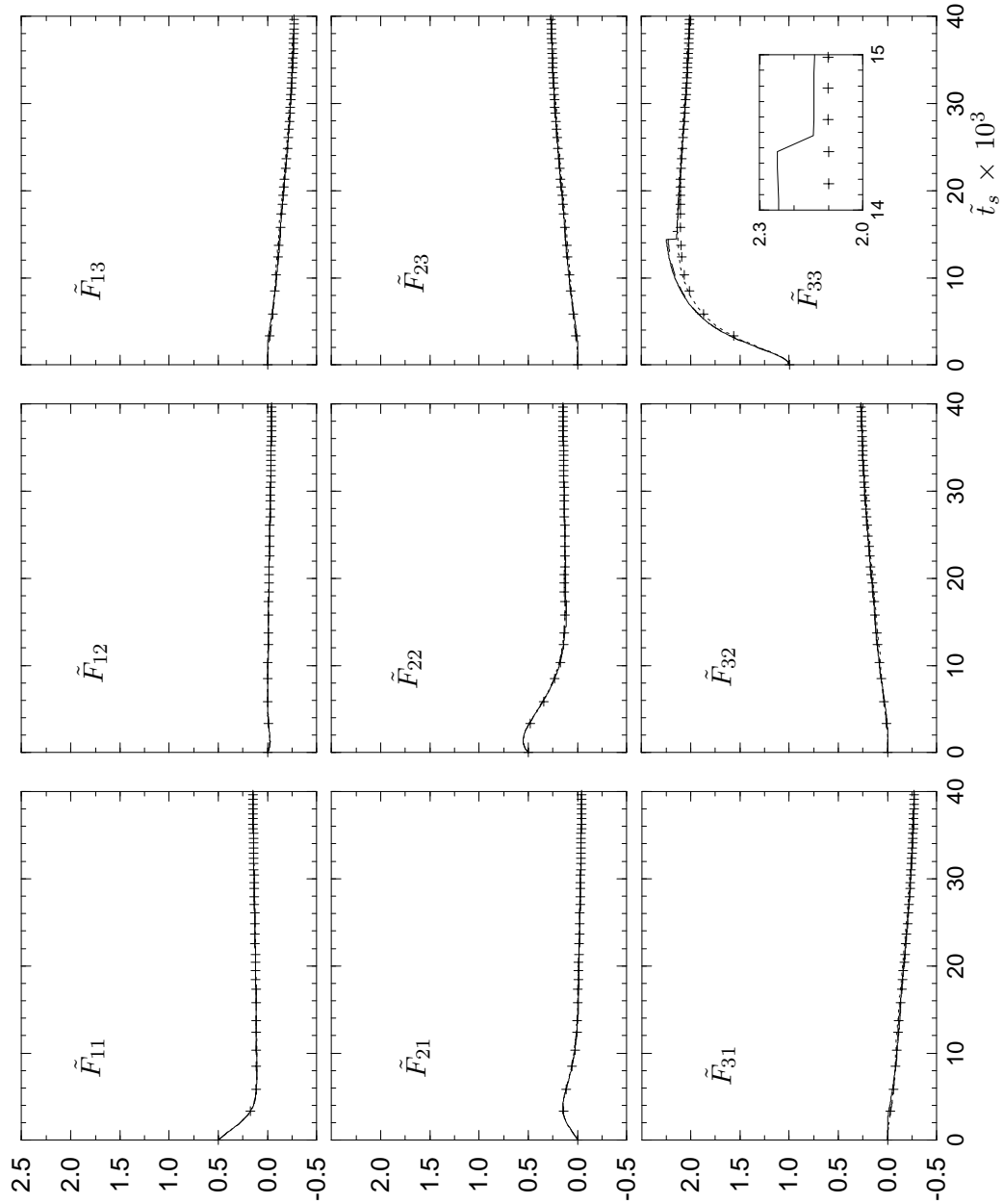
Notons que l'erreur relative n'est pas nulle à  $\tilde{t}_s = 0$  pour la fabrique isotrope. Lorsque la fabrique est isotrope, le comportement calculé avec l'ODF paramétrée est exact (résultat analytique) et par conséquent cette erreur est uniquement attribuable à la méthode des grains discrets. Ceci montre que même avec 882 grains nous obtenons, tout de même (!), une erreur relative de 0.1% sur le comportement isotrope.

D'une façon générale, les méthodes utilisant l'ODF pour décrire la fabrique sont très précises lorsque la fabrique est isotrope ou peu anisotrope. Ensuite, lorsque la fabrique se concentre, l'utilisation de l'ODF est plus délicate puisqu'elle conduit à intégrer des fonctions à pics très marqués, que ce soit pour le comportement du polycristal ou pour le calcul de l'évolution de la fabrique (quelle que soit la méthode numérique utilisée). C'est le contraire avec la méthode utilisant un nombre fini de grains discrets qui devient plus précise lorsque la fabrique se concentre.

En imposant un seuil  $k_{min}$  aux paramètres  $k_i$ , nous limitons les temps de calcul et les résultats obtenus sont meilleurs pour les fabriques concentrées. Le seul inconvénient

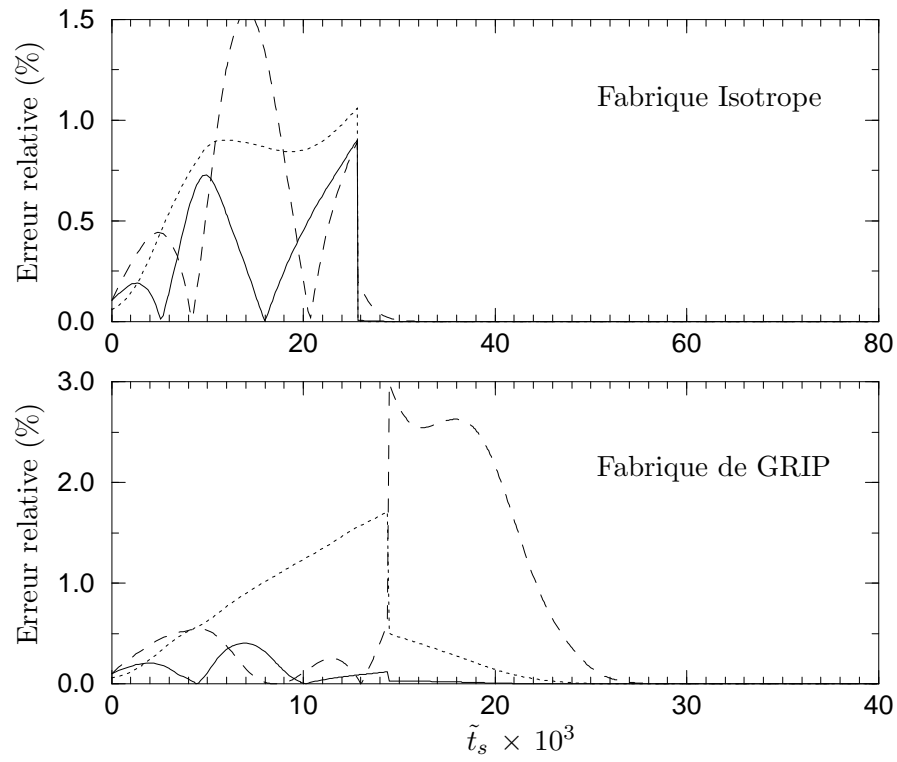


**Fig. 7.3 :** Evolution des fluidités adimensionnées  $\tilde{F}_{ij}$ , en fonction du temps adimensionné  $\tilde{t}_s$  le long de la ligne de courant de l'écoulement à fabrique isotrope, obtenues avec la méthode des grains discrets (croix), la méthode de l'ODF discrétisée (pointillés), et les méthodes des moindres carrés (tirets) et directe (trait continu) utilisant l'ODF paramétrée.

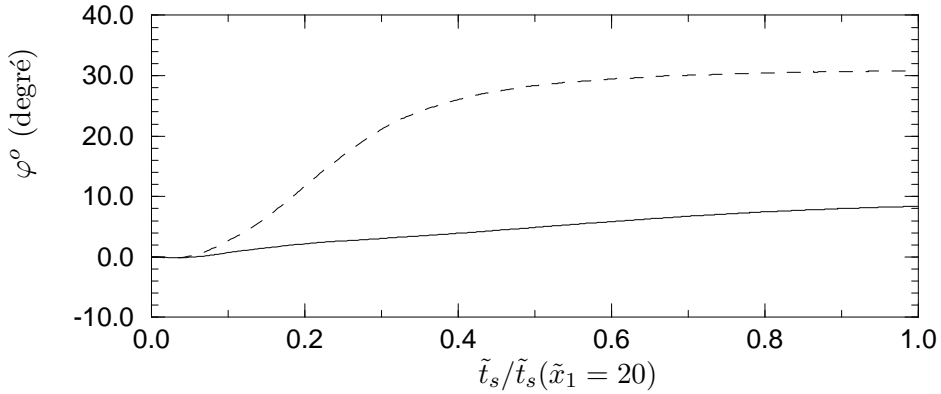


**Fig. 7.4 :** Evolution des fluidités adimensionnées  $\tilde{F}_{ij}$ , en fonction du temps adimensionné  $\tilde{t}_s$  le long de la ligne de courant de l'écoulement à fabrique "GRIP", obtenues avec la méthode des grains discrets (croix), la méthode de l'ODF discrétisée (pointillés), et les méthodes des moindres carrés (tirets) et directe (trait continu) utilisant l'ODF paramétrée.





**Fig. 7.5 :** Evolution de l'erreur relative entre le calcul avec les grains discrets et le calcul direct utilisant l'ODF paramétrée (3.34) pour les fluidités  $\tilde{F}_{11}$  (trait plein),  $\tilde{F}_{22}$  (tirets) et  $\tilde{F}_{33}$  (pointillés) à partir des deux écoulements (fabrique initiale isotrope ou "GRIP").



**Fig. 7.6 :** Evolution du paramètre d'orientation  $\varphi^\circ$  de l'ODF paramétrée (3.34) en fonction du pourcentage du temps de trajet jusqu'à  $\tilde{x}_1 = 20$ , pour les écoulements à fabrique isotrope (tirets) et à fabrique selon GRIP (trait plein).

est la discontinuité introduite dans le comportement lorsque le plus petit des paramètres devient inférieur à  $k_{min}$ . Cette discontinuité est visible pour  $\tilde{F}_{33}$  sur les Figures 7.3 et 7.4 à  $\tilde{t}_s = 26.0 \cdot 10^3$  et  $\tilde{t}_s = 14.5 \cdot 10^3$ , respectivement. Elle est aussi visible sur la Figure 7.5 où l'erreur relative subit une discontinuité marquée lorsque la valeur  $k_{min}$  est atteinte et devient très faible ensuite.

### 7.3.3.3 Commentaires sur les fabriques obtenues

A  $\tilde{t}_s = 0$ , en surface, la fabrique est isotrope et la matrice des fluidités adimensionnées a donc la forme suivante :

$$(7.6) \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, les fluidités  $\tilde{F}_{ij}$  évoluent en fonction de l'écoulement pour lequel est calculé la ligne de courant (fabrique isotrope ou "GRIP"), et reflètent la forme des fabriques créées.

Il est intéressant de remarquer que la valeur minimum  $k_{min}$  est atteinte pour une même abscisse  $\tilde{x}_1 \approx 4$  correspondant à  $\tilde{t}_s = 26.0 \cdot 10^3$  pour l'écoulement isotrope et à  $\tilde{t}_s = 14.5 \cdot 10^3$  pour l'écoulement anisotrope. Par contre, les coefficients de la matrice des fluidités, en cette abscisse, ne sont pas égaux pour les deux écoulements. Ceci montre qu'en un point donné, les degrés de concentration des fabriques (*i.e.* les valeurs des  $k_i$ ) sont les mêmes pour les deux écoulements, mais les maximums d'orientation (*i.e.* les valeurs du paramètre d'orientation  $\varphi^\circ$ ) sont différents, ce qui explique la différence de comportement.

La Figure 7.6 montre l'évolution le long de la ligne de courant du paramètre d'orientation  $\varphi^\circ$  (en degré) de l'ODF paramétrée (3.34) pour les écoulements isotrope et anisotrope. Sur cette figure, il apparaît que les conditions de l'écoulement isotrope conduisent

à des fabriques dont l'orientation du pic est à  $31^\circ$  de la verticale, tandis que pour les conditions de l'écoulement à fabrique "GRIP", le pic est à seulement  $9.5^\circ$ . Cette différence d'orientation de  $20.5^\circ$  conduit à un comportement radicalement différent du polycristal dans le repère de référence  $\{R\}$ . Par exemple, en  $\tilde{x}_1 = 20$ , pour l'écoulement anisotrope la fluidité en cisaillement  $\tilde{F}_{33}$  est deux fois plus importante que celle de la glace isotrope, tandis que pour l'écoulement isotrope cette fluidité est 1.54 fois plus petite que celle de la glace isotrope (*cf.* Figures 7.4 et 7.3).

## 7.4 Calcul du champ de fabriques pour un champ de vitesses donné

L'objectif est de déterminer le champ de fabriques stationnaire en chaque nœud du maillage, pour un champ de vitesses donné, un comportement du matériau connu et une fabrique isotrope en surface.

Compte tenu des avantages présentés par la méthode directe utilisant l'ODF paramétrée, le calcul de l'évolution de la fabrique est conduit en utilisant cette méthode. La fabrique est donc représentées par les trois paramètres de l'ODF paramétrée (3.34) en chaque nœud du maillage.

### 7.4.1 Méthode numérique

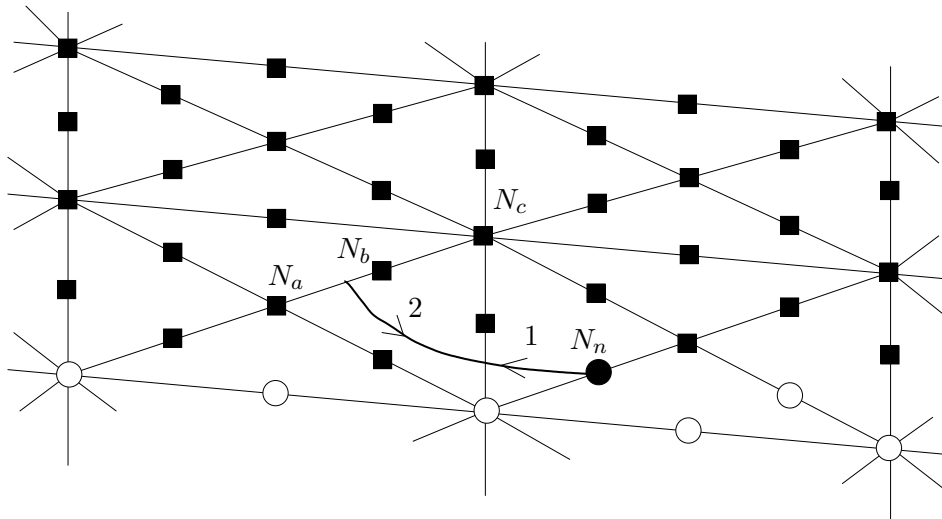
La méthode mise en place précédemment peut s'appliquer à ce problème. Pour chaque nœud du maillage, la ligne de courant est remontée jusqu'à la surface où la fabrique est connue (isotrope), puis le calcul d'évolution de la fabrique est conduit de la surface jusqu'au nœud considéré.

Dans le but de diminuer le temps de calcul nécessaire à la réalisation de cette opération pour tous les nœuds du maillage, la ligne de courant est remontée seulement en partie, jusqu'au premier côté rencontré (frontière d'éléments  $T6$ ) tel que la fabrique a déjà été calculée en ses trois nœuds, pendant l'itération en cours (*cf.* Figure 7.7). Ceci suppose que le calcul d'évolution soit effectué dans un ordre précis, en parcourant les nœuds du dôme vers le bord de la calotte et de la surface vers le fond.

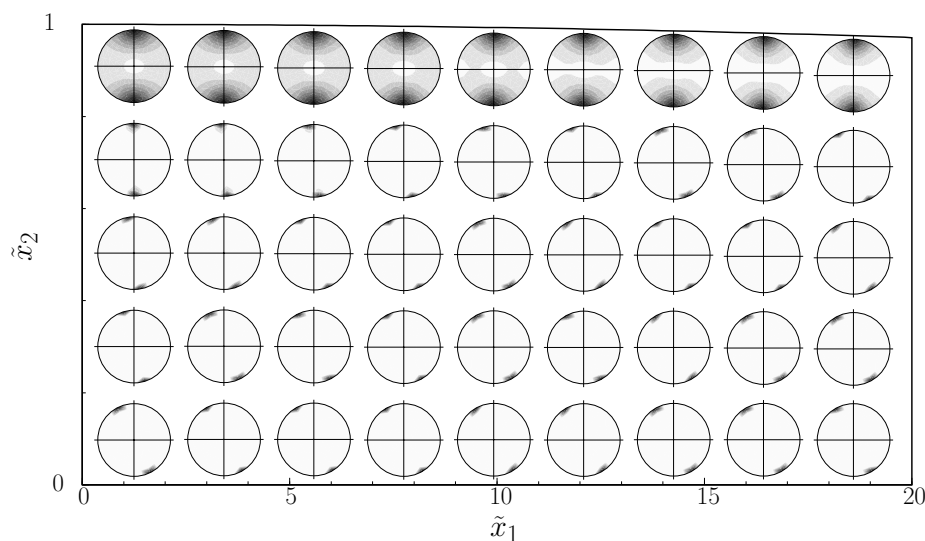
La Figure 7.7 présente les deux phases du calcul pour un nœud donné. Dans une première phase, la ligne de courant est remontée jusqu'à la première frontière rencontrée où le calcul de la fabrique a déjà été effectué pour les trois nœuds. L'intégration des équations (7.3) est faite en adoptant un pas de temps  $\Delta\tilde{\tau}$  constant. Au cours de cette phase, pour chaque point  $M_i$  de la ligne de courant calculé au temps  $\tilde{\tau}_i$ , les contraintes déviatoires et la vitesse de rotation sont déterminées et stockées. Dans une deuxième phase, l'évolution de la fabrique est calculée en prenant comme fabrique initiale la fabrique interpolée sur les trois nœuds du côté intercepté, et en imposant les conditions de contraintes et de vitesse de rotation déterminées aux points  $M_i$  au cours de la phase 1.

### 7.4.2 Application

Nous avons appliqué cette méthode au calcul des champs de fabriques stationnaires pour les écoulements  $\{DP, Gr1, F_{GRIP}, T_{-27.9}\}$  et  $\{DP, Gr1, F_{ISO}, T_{-27.9}\}$  (*cf.* Tableau 6.2 pour la définition des notations). Nous continuons à nous limiter à l'étude du voisinage



**Fig. 7.7 :** Schématisation de la procédure de calcul de la fabrique du nœud  $N_n$  (disque noir). Phase 1 ( $<$ ) : La ligne de courant est remontée jusqu'à la première frontière d'élément sur laquelle le calcul a déjà été effectué pour les trois nœuds (carré noir). Phase 2 ( $>$ ) : L'évolution de la fabrique est calculée le long de la ligne de courant en prenant comme fabrique initiale la fabrique interpolée sur les fabriques des nœuds  $N_a$ ,  $N_b$  et  $N_c$ . Les cercles vides représentent les nœuds pour lesquels la fabrique n'a pas encore été calculée.



**Fig. 7.8 :** *Champ de fabriques stationnaire correspondant à l'écoulement à fabrique isotrope. La projection de Schmidt est faite sur le plan  $(x_1, x_2)$ .*

du dôme, et par conséquent la fabrique n'est calculée que pour les nœuds du domaine défini par  $\tilde{x}_1 < 20$ . Les résultats sont présentés sur les Figures 7.8 et 7.10 sous forme de figures de pôles dans le plan  $(x_1, x_2)$  réparties sur le domaine.

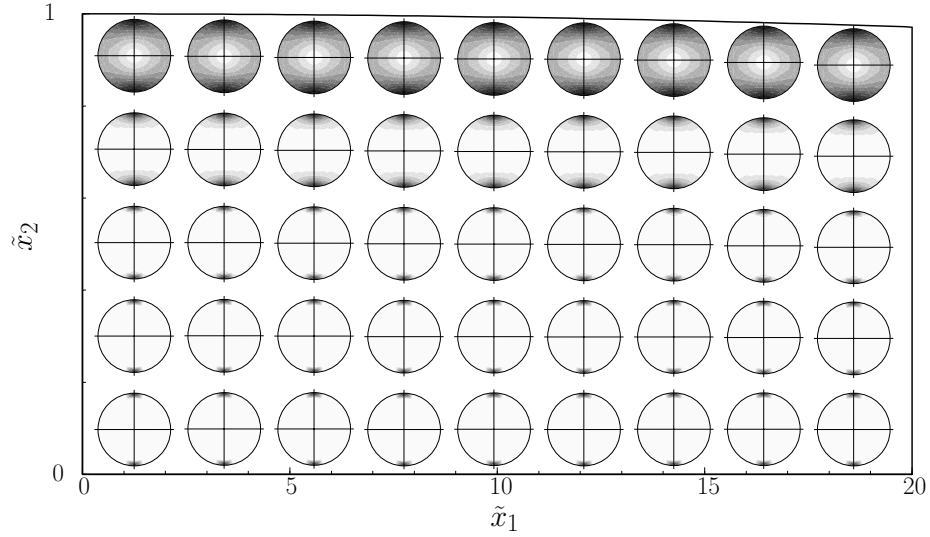
Comme nous l'avons observé le long d'une ligne de courant, les fabriques calculées à partir des deux écoulements n'ont pas la même orientation. Nous pouvons vérifier que cette différence d'orientation est globalement présente sur l'ensemble du domaine. Un nouveau calcul des vitesses, à partir de ces champs de fabriques et de la loi de comportement correspondante, va donc conduire à deux champs de vitesses très différents. Un des objectifs du chapitre suivant est de montrer qu'après quelques itérations du calcul des vitesses et de la fabrique, les champs de fabriques et de vitesses convergent vers une solution indépendante du champ de fabriques choisi comme initial.

Pour comparaison, le champ de fabriques initial "GRIP" est montré sur la Figure 7.9. L'observation des figures de pôles montre que, pour une profondeur donnée, les fabriques calculées sont plus concentrées que celles observées dans le forage de GRIP et elles présentent une légère déviation par rapport à la verticale.

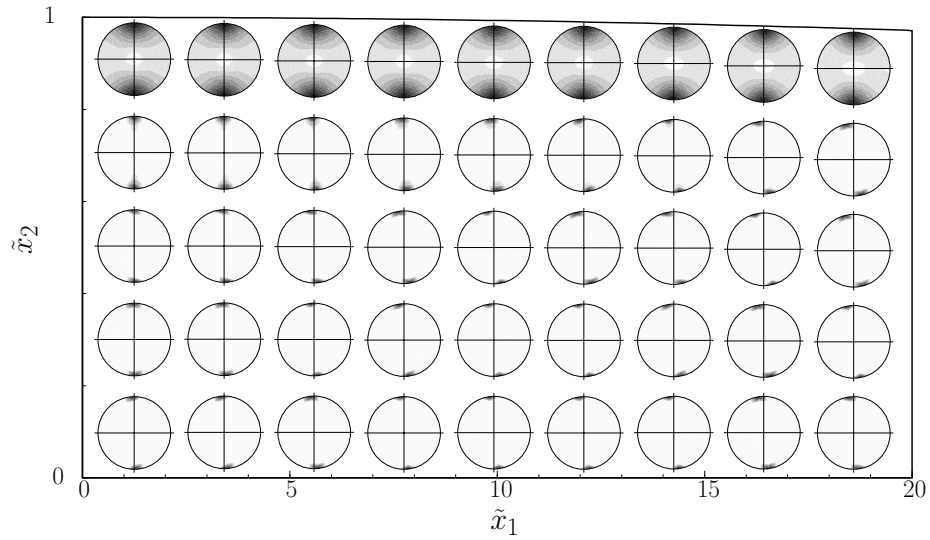
## 7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en place les méthodes numériques qui permettent de calculer le champ de fabriques stationnaire correspondant à un champ de vitesses donné.

La comparaison des fabriques obtenues le long d'une ligne de courant, avec la méthode des grains discrets et les méthodes utilisant l'ODF paramétrée, montre que pour l'application aux calottes polaires l'hypothèse de fabrique orthotrope est acceptable. Nous avons donné par ailleurs les avantages de la méthode directe utilisant l'ODF paramétrée (3.34), tant sur le nombre de paramètres à stocker en chaque nœud (trois) que sur le



**Fig. 7.9 :** *Champ de fabriques initial d'après la fabrique mesurée à GRIP (Groenland). La projection de Schmidt est faite sur le plan  $(x_1, x_2)$ .*



**Fig. 7.10 :** *Champ de fabriques stationnaire correspondant à l'écoulement à fabrique "GRIP". La projection de Schmidt est faite sur le plan  $(x_1, x_2)$ .*

temps nécessaire au calcul d'un pas d'évolution de la fabrique.

La méthode utilisée pour calculer le champ de fabriques en tout point du domaine que nous avons mise en place utilise donc l'ODF paramétrée (3.34) pour décrire la fabrique.

Au chapitre suivant, nous déterminons les champs de fabriques et de vitesses correspondants à l'écoulement stationnaire d'une calotte polaire de géométrie fixée.





## Chapitre 8

# Calcul couplé des champs de vitesses et de fabriques

### 8.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous recherchons les champs de vitesses et de fabriques correspondant à l'écoulement stationnaire d'une calotte polaire de géométrie donnée. La résolution de ce problème est réalisée par une méthode couplée qui alterne le calcul du champ de vitesses pour une fabrique donnée et le calcul de la fabrique pour un champ de vitesses donné.

Nous montrons que le problème couplé converge vers une solution indépendante du champ de fabriques choisi comme champ initial. Nous étudions l'influence d'un champ de températures tel que celui observé à GRIP sur la forme du champ de fabriques de l'écoulement stationnaire. Nous discutons de l'influence du comportement du grain et du type de l'écoulement (déformations planes ou axisymétrique), sur la rapidité de l'écoulement et sur la formation des fabriques.

Enfin, nous appliquons notre modèle à la ligne d'écoulement passant par les deux forages profonds de GRIP et GISP2, au Groenland Central. Nous montrons que la fabrique obtenue à la convergence du problème couplé est plus proche de celle observée que celle que nous avons obtenue à l'aide du modèle "1D" présenté au **Chapitre 5** (§5.3). Nous proposons une datation des deux forages, pour les conditions de fabrique et de vitesses obtenues à la convergence du problème couplé.

### 8.2 Méthodes numériques

Le principe du calcul couplé est le suivant :

- I Choix d'un champ de fabriques initial.
- II Calcul du champ de vitesses pour un champ de fabriques donné (*cf.* **Chapitre 6**).
- III Calcul du champ de fabriques pour un champ de vitesses donné (*cf.* **Chapitre 7**).
- IV Les étapes II et III sont répétées alternativement jusqu'à la convergence.

Les étapes **II** et **III** de ce schéma de calcul sont explicitées dans les **Chapitres 6** et **7**. Par contre, il reste à définir les critères de convergence de l'étape **IV** et à montrer que la solution obtenue à la convergence est indépendante du champ de fabriques initial choisi à l'étape **I**.

### 8.2.1 Critères de convergence

Pour mesurer la convergence du problème couplé, nous comparons pour chaque nœud du domaine ( $\tilde{x}_1 < 20$ ) les valeurs des nouvelles vitesses et des nouveaux paramètres de la fabrique à celles du pas précédent.

Notant  $q^k(m)$  la valeur de la variable  $q$  (composantes de la vitesse et paramètres de fabrique) au nœud  $m$  du maillage obtenue comme solution de la  $k^{\text{ème}}$  itération, la comparaison des solutions de deux solutions consécutives  $k - 1$  et  $k$ , est faite en considérant, pour chaque nœud du maillage et pour chaque variable, l'écart :

$$(8.1) \quad e_m(q) = \frac{|q^k(m) - q^{k-1}(m)|}{\max_m(q^k(m))},$$

où  $\max_m(q^k(m))$  désigne la valeur maximum de  $|q^k(m)|$  obtenue sur le domaine  $\tilde{x}_1 < 20$ .

Ces écarts "normés" sont calculés pour chacune des deux composantes de la vitesse et pour chaque paramètre  $k_i$  et  $\varphi$ . Cette normalisation a été adoptée pour éviter les problèmes dûs au fait que, la vitesse étant nulle sur le socle rocheux, les écarts relatifs  $|q^k(m) - q^{k-1}(m)|/|q^k(m)|$  ne sont pas bornés sur cette frontière.

Nous supposons la convergence atteinte lorsque la valeur moyenne de  $e_m(q)$  sur tous les nœuds est inférieure à  $10^{-3}$  pour chacune des variables (vitesses et fabriques).

### 8.2.2 Unicité de la solution à la convergence

Nous avons montré dans le **Chapitre 7** que pour un champ de vitesses donné, le calcul de la fabrique ne dépendait que du rapport d'aspect de la calotte et des paramètres du grain  $\beta$  et  $\gamma$ .

Le problème est donc de savoir si, pour un rapport d'aspect et des paramètres rhéologiques  $\beta$  et  $\gamma$  de grain donnés, les champs de vitesses et de fabriques à la convergence sont indépendants des conditions initiales (*i.e.* du champ de fabriques initial).

La solution la plus simple consiste à comparer les solutions obtenues à la convergence pour différents champs de fabriques initiaux. Cette démarche ne constitue pas une preuve de l'unicité de la solution, mais elle permet de montrer que si l'on adopte un champ de fabriques initial réaliste la solution à la convergence ne dépend pas de ce choix.

La comparaison est effectuée dans le cas d'un écoulement plan (déformations planes), le comportement du grain est caractérisé par  $\beta = 0.25$  et  $\gamma = 1.0$  et la température est isotherme ( $T = -27.9^\circ\text{C}$ ). Ces données n'évoluent pas au cours du calcul couplé. Nous comparons les solutions obtenues à la convergence du problème couplé pour une fabrique initiale isotrope et "GRIP". Le maillage comporte 4941 nœuds et il est défini par  $\{N_{b1} = 60, r_1 = 1.01, N_{b2} = 10, r_2 = 1.1\}$  (*cf.* §6.4.2 pour la définition de ces notations).

Nous vérifions bien que les champs de vitesses et de fabriques à la convergence ne dépendent pas de la fabrique initiale. La différence entre les deux solutions convergées sur

les vitesses et la fabrique (calculée comme s'il s'agissait de solutions itératives successives, cf. §8.2.1) est du même ordre de grandeur que le critère de convergence ( $< 10^{-3}$ ). La Figure 8.1 montre les profils de vitesses verticale et horizontale, l'évolution du rayon d'orientation  $Ro$  défini par (5.14) et du paramètre d'orientation  $\varphi^o$ , en fonction de la profondeur réduite  $\hat{x}_2$  en  $\hat{x}_1 = 10$ . Sur chaque graphe sont représentées les courbes "initiales"<sup>1</sup> (cercle), les courbes calculées après une itération (croix) et les courbes à la convergence (courbe seule).

La convergence est obtenue après 23 itérations pour la fabrique initiale isotrope et seulement 14 itérations pour celle de "GRIP". Cette différence reflète simplement l'écart entre le champ de fabriques initial et le champ obtenu à la convergence, comme le montrent les courbes (cercles) de la Figure 8.1c.

Pour les deux champs de fabriques initiaux, la concentration de la fabrique, caractérisée par  $Ro = Ro(k_1, k_2, k_3)$ , est dès la première itération très proche de la solution à la convergence (cf. Figure 8.1c). Comme nous l'avons montré au paragraphe 3.6.3.2, la valeur des paramètres  $k_i$  ne dépend que de l'histoire des contraintes. Par ailleurs, sur la Figure 7.2, nous n'avons pas observé de différence sur les contraintes de cisaillement  $\bar{S}_{12}$  pour les écoulements à fabrique initiale isotrope et "GRIP". La contrainte de cisaillement étant rapidement très supérieure aux contraintes  $\bar{S}_{11}$  et  $\bar{S}_{22}$ , il est donc logique d'obtenir des histoires des contraintes similaires, et par conséquent, une concentration de la fabrique dépendant faiblement du champ de fabriques.

Par contre, les profils de vitesses de la première itération (marqués avec des croix sur les Figures 8.1a et 8.1b) sont très éloignés des profils obtenus à la convergence (courbe seule) et ils dépendent du champ de fabriques initial. Ceci est le résultat des différences d'orientation des repères des symétries matérielles, caractérisés par  $\varphi^o$ , entre les calculs à fabrique initiale isotrope et celle de "GRIP", comme le montre la Figure 8.1d.

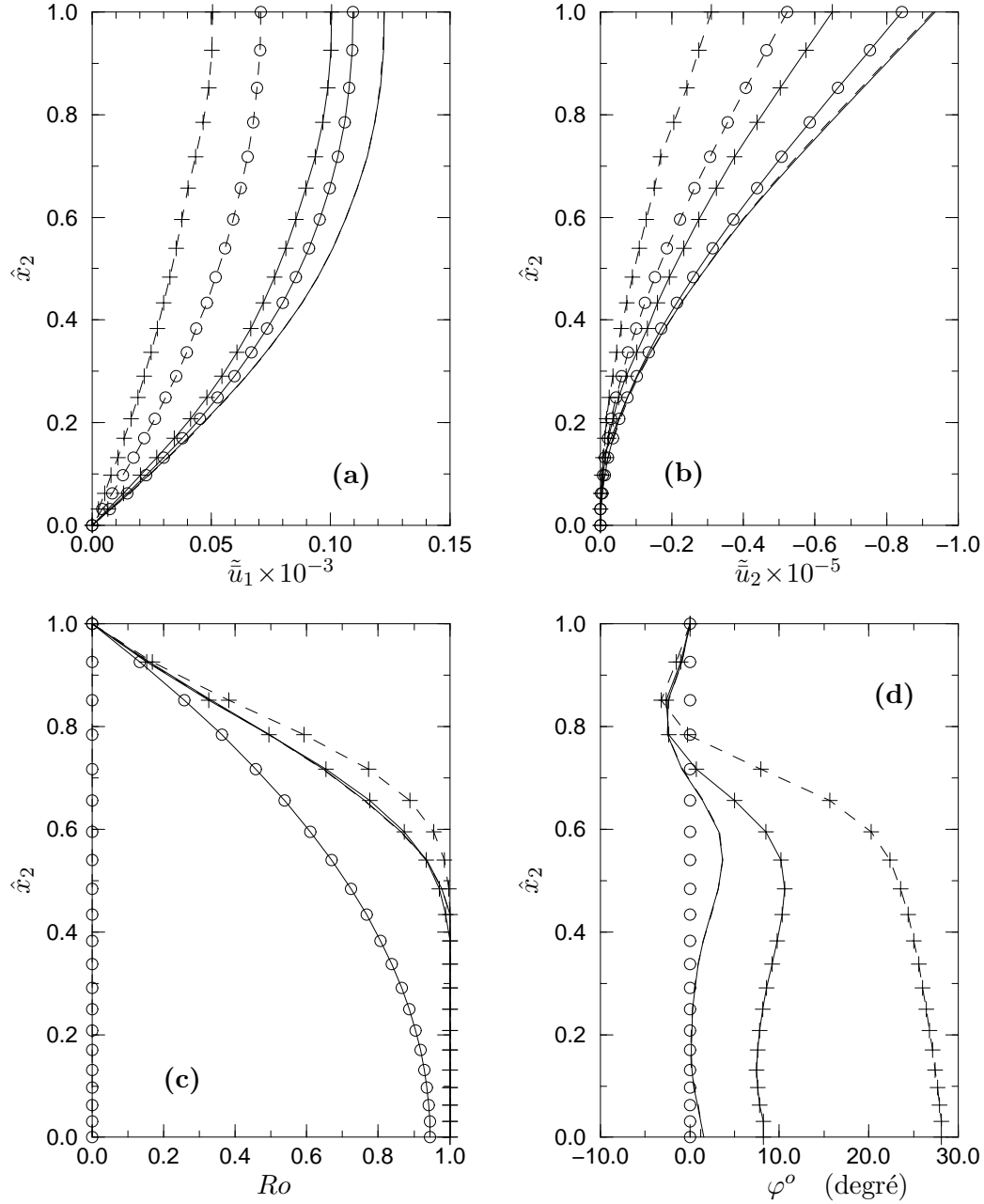
Notons que les vitesses de la première itération sont plus faibles que les vitesses initiales, mais à la convergence du problème couplé, nous obtenons un écoulement plus rapide que celui avec la fabrique mesurée dans le forage de GRIP, même si les directions calculées des maximums d'orientation ne sont pas exactement verticales sur toute la hauteur de la calotte. L'écoulement calculé est globalement plus rapide car la fabrique à la convergence est plus concentrée que celle mesurée à GRIP (cf. Figure 8.1c).

### 8.2.3 Instabilités numériques

A proximité du socle, le calcul des lignes de courant est délicat car les vitesses verticales et horizontales sont très faibles relativement aux vitesses de surface et elles s'annulent au contact du lit rocheux. Pour améliorer la qualité du champ de vitesses au voisinage du lit, nous pouvons jouer sur la taille des éléments dans cette zone : si nous diminuons la taille des éléments, nous rapprochons les nœuds de la frontière où les vitesses s'annulent, tandis que si nous augmentons la taille des éléments nous perdons en précision sur le calcul des vitesses.

Par ailleurs, la vitesse aux nœuds appartenant à la frontière du lit rocheux étant nulle, il n'est pas possible de calculer la fabrique en ces nœuds. Plusieurs solutions sont alors envisageables. La plus simple est de leur conserver la fabrique initiale, mais ceci

<sup>1</sup>Nous considérons que le champ de vitesses initial est celui calculé à partir du champ de fabrique initial, dans la première itération de l'étape II.



**Fig. 8.1 :** Comparaison à la convergence du problème couplé des champs de vitesses et fabriques pour un champ de fabriques initial isotrope (tirets) et "GRIP" (trait plein). Les figures présentent l'évolution de  $\tilde{u}_1$  (a),  $\tilde{u}_2$  (b),  $Ro$  (c) et  $\varphi^o$  (d) pour les conditions initiales (cercle), après une première itération (croix) et à la convergence (courbe seule), en fonction de la profondeur réduite  $\hat{x}_2$  et en  $\hat{x}_1 = 10$ . A la convergence (courbe seule), les tirets sont souvent cachés par le trait plein.

introduit une erreur sur le comportement du polycristal calculé aux points d'intégration des éléments de la nappe située au contact lit rocheux. Une deuxième solution consiste à extrapoler les valeurs de la fabrique obtenues aux deux nœuds situés immédiatement au dessus de chaque nœud du lit. C'est la méthode que nous appliquons<sup>2</sup>.

L'observation de l'évolution du paramètre d'orientation  $\varphi^o$  en fonction de la profondeur montre que la convergence est obtenue du haut vers le bas au cours des itérations.

Toutes ces remarques montrent qu'une attention particulière doit être apportée à la réalisation du maillage, tant sur le nombre de nœuds que sur la progression de la taille des éléments selon la verticale. Nous avons observé, pour d'autres maillages que celui utilisé ici, l'apparition d'instabilités dans le calcul du paramètre d'orientation  $\varphi^o$ . Ces instabilités sont le résultat de problèmes liés au calcul du champ de vitesses, par exemple lorsqu'une ligne de courant vient se "coller" à la frontière du socle (conséquence d'erreurs numériques).

### 8.3 Application à une calotte de géométrie simplifiée

Dans cette partie, nous appliquons la méthode couplée à la calotte polaire théorique de Vialov (1958). Nous testons successivement l'influence de la température, du comportement et du type de l'écoulement sur les champs de vitesses et fabriques à la convergence du problème couplé.

#### 8.3.1 Influence du champ de températures

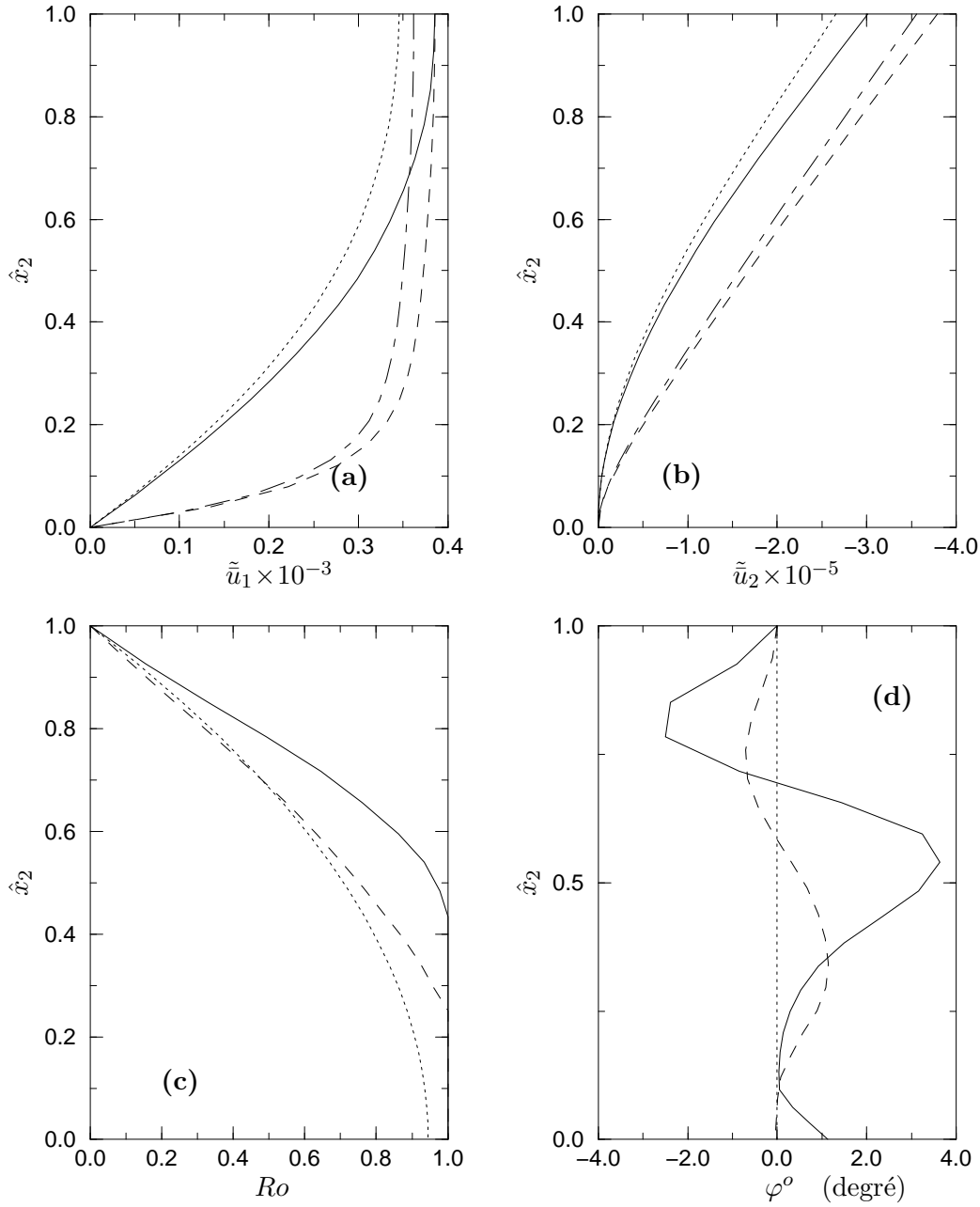
Pour cette application, l'écoulement est en déformations planes, le comportement du grain défini par  $\beta = 0.25$  et  $\gamma = 1.0$ , et nous comparons les solutions à la convergence pour les champs de températures isotherme et "GRIP".

La Figure 8.2 présente les vitesses et la fabrique obtenues, en fonction de la profondeur réduite en  $\tilde{x}_1 = 10$  par le calcul avec le champ isotherme (courbe pleine), et le champ de températures "GRIP" (tirets). La température du champ isotherme vaut  $T = -20.6^\circ C$  : elle est choisie de façon à obtenir la même vitesse horizontale en surface en  $\tilde{x}_1 = 10$  que pour l'écoulement à température "GRIP".

Sur cette figure, nous mesurons l'influence d'un champ de températures tel que celui de GRIP sur la formation des fabriques au sein de la calotte polaire. Nous observons que, pour les deux calculs couplés, les vitesses sont globalement supérieures à celles obtenues à partir du champ de fabriques "GRIP" (sans calcul couplé, en pointillé et trait mixte sur la Figure 8.2). Nous notons toutefois que l'écart entre les vitesses du problème couplé et celles calculées à partir du champ de fabriques "GRIP", est plus important lorsque le champ de températures est isotherme. La raison de cette différence provient du fait que, comme nous allons le voir plus loin, l'écart entre la fabrique à la convergence du problème couplé et celle de "GRIP" est plus important dans le cas isotherme que dans le cas du champ de températures "GRIP".

Sur la Figure 8.2c, nous observons que la concentration de la fabrique est beaucoup plus lente pour le champ de températures "GRIP" que pour le champ isotherme. La

<sup>2</sup>Notons que ce problème devrait disparaître lorsque notre modèle sera capable de prendre en compte une couche basale recristallisée pouvant être considérée comme isotrope, le changement de comportement de la glace étant alors déterminé par critère.



**Fig. 8.2 :** Comparaison de la solution à la convergence du problème couplé pour les champs de températures isotherme (trait plein) et "GRIP" (tirets). Les figures présentent l'évolution de  $\tilde{u}_1$  (a),  $\tilde{u}_2$  (b),  $Ro$  (c) et  $\varphi^o$  (d) en fonction de la profondeur réduite  $\hat{x}_2$  en  $\hat{x}_1 = 10$ . Nous avons reporté sur (a) et (b) les vitesses calculées (sans calcul couplé) à partir du champ de fabriques "GRIP" pour les cas isotherme (pointillé) et température "GRIP" (trait mixte). Les courbes correspondant à la fabrique mesurée dans le forage de GRIP sont représentées par les pointillés sur (c) et (d).

concentration de la fabrique obtenue à la convergence pour le champ de températures "GRIP" est relativement proche de celle observée dans le forage de "GRIP". La direction du maximum de la fabrique obtenue avec le champ de températures "GRIP" est plus verticale qu'avec la température isotherme. Nous observons une déviation maximum, en valeur absolue, de  $1.2^\circ$  pour le calcul à température "GRIP", et de  $3.8^\circ$  pour le calcul isotherme.

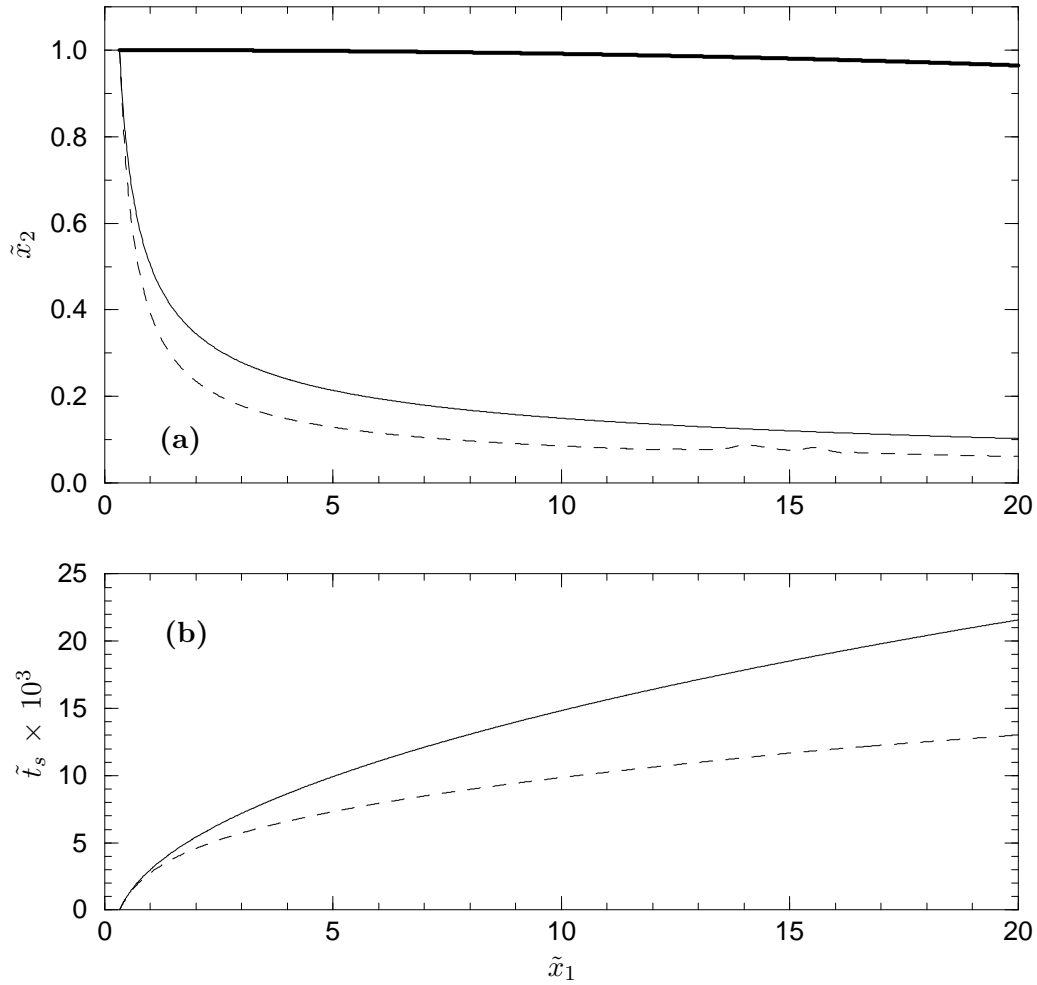
Ces résultats montrent que les champs de températures observés dans les forages influent sur la formation des fabriques, et que cette influence semble aller dans le sens des fabriques observées. Les Figures 8.3 et 8.4 vont nous aider à comprendre pourquoi un champ de températures tel que celui observé à GRIP conduit à une évolution de la fabrique moins rapide que lorsque la température est isotherme.

Notons, tout d'abord, que la valeur de la température du champ isotherme n'affecte pas le calcul du champ de fabriques (*cf.* §7.2.3). Pour le champ de températures "GRIP", seul le gradient de température influence le calcul du champ de fabriques, puisque ce calcul peut aussi être mené sous forme adimensionnée.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.6.3.2, la concentration de la fabrique (*i.e.* la valeur de  $Ro$ ), en un point donné, ne dépend que des paramètres de l'histoire des contraintes (3.24). La concentration de la fabrique est donc directement proportionnelle à l'exponentielle des intégrales  $\int_0^t \psi \bar{S}_{ij} dt$ . Or, nous observons sur la Figure 8.4 que les termes  $\tilde{\psi} \tilde{\bar{S}}_{11}$ ,  $\tilde{\psi} \tilde{\bar{S}}_{22}$  et  $\tilde{\psi} \tilde{\bar{S}}_{12}$  de l'écoulement à température "GRIP" sont deux à trois fois inférieurs à ceux de l'écoulement isotherme, puisque la valeur de  $\psi$  dépend de la température, selon la loi (1.4). Cet effet étant encore amplifié par le fait que l'écoulement le long de la ligne de courant à température "GRIP" est presque deux fois plus rapide que celui isotherme, ce qui diminue d'autant la valeur des paramètres de l'histoire des contraintes en un point donné de la ligne de courant. La conséquence cumulée de ces deux phénomènes conduit à une différence notable sur la concentration des fabriques, en un point donné, entre les écoulements isotherme et à température "GRIP".

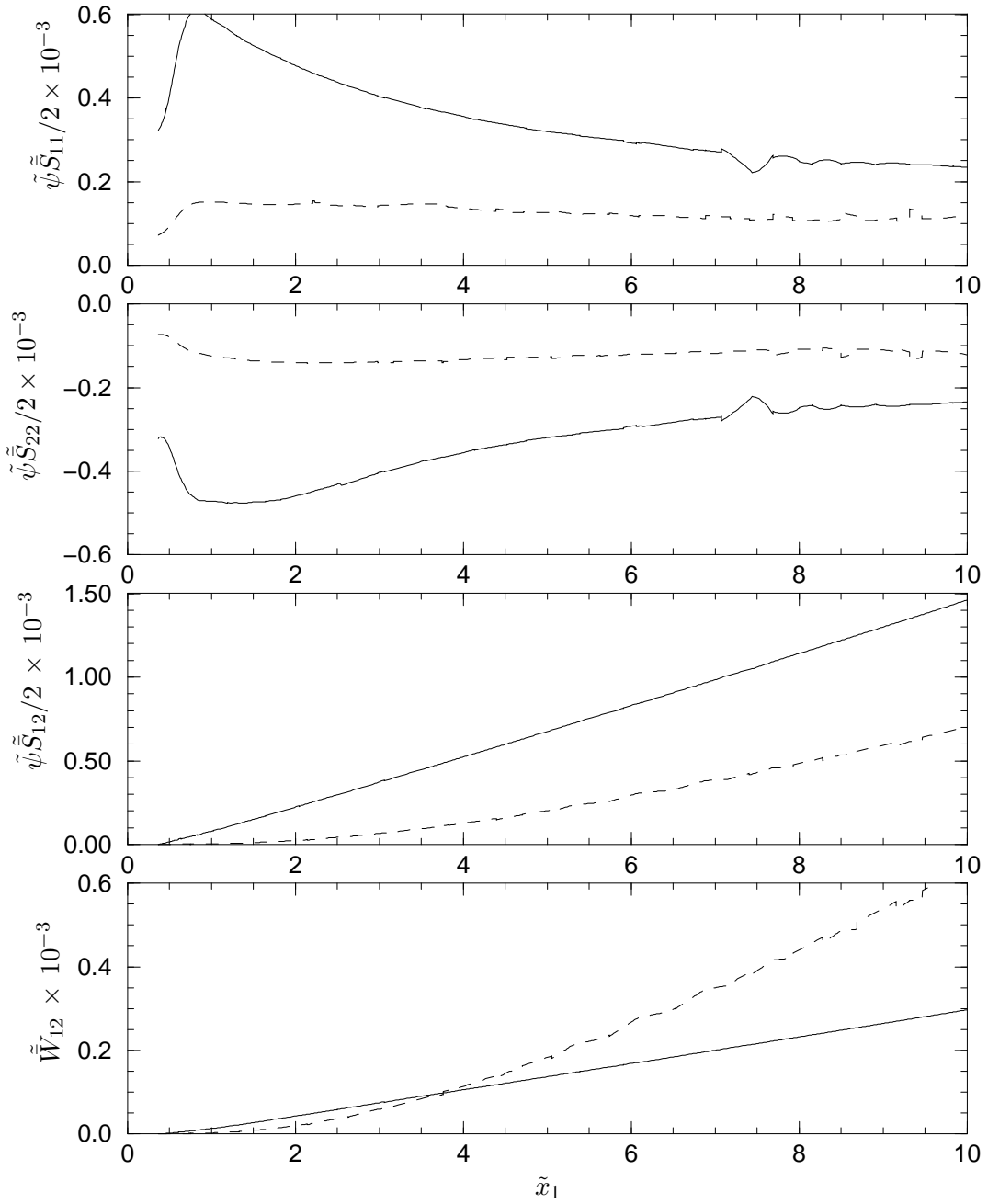
Notons que l'écoulement global n'est pas plus rapide pour l'écoulement à température "GRIP" (puisque nous avons imposé la température du champ isotherme de façon à avoir la même vitesse horizontale en surface), mais les deux écoulements conduisent à des gradients verticaux de vitesses très différents. De même, l'état de contrainte dans la calotte polaire est quasi-identique pour les deux écoulements, mais pas les termes  $\psi \bar{S}_{ij}$ .

Pour expliquer la différence d'orientation des fabriques entre les deux écoulements, nous rappelons que la vitesse de rotation d'un grain est la différence entre la vitesse de rotation macroscopique et la vitesse de rotation du cristal due à sa déformation. Pour le modèle à contraintes homogènes, la vitesse de rotation d'un grain dépend donc de l'état de contrainte au point considéré, sachant que les grains vont se diriger vers la direction principale de compression, caractérisée par l'angle  $\lambda$  entre le repère de référence et le repère des contraintes principales. Si seule  $\tilde{\bar{S}}_{12}$  est non nulle, alors  $\lambda = 45^\circ$  et lorsque  $\tilde{\bar{S}}_{12} = 0$ ,  $\lambda$  vaut  $0^\circ$  si  $\tilde{\bar{S}}_{11} < 0$  et  $90^\circ$  si  $\tilde{\bar{S}}_{22} < 0$ . Ainsi plus  $\tilde{\bar{S}}_{12}$  est important relativement à  $\tilde{\bar{S}}_{11}$  et  $\tilde{\bar{S}}_{22}$ , plus la vitesse de rotation du grain due à sa déformation est défavorable à la formation d'une fabrique à maximum d'orientation vertical. De la même façon, comme l'indique la définition de  $\dot{\varphi}$  (3.43), plus la vitesse de rotation macroscopique  $\bar{W}_{12}$  est petite par rapport au terme  $\psi \bar{S}_\lambda$ , plus son effet est faible pour "ramener" les grains vers une orientation verticale. La Figure 8.5a montre que, pour l'écoulement à température

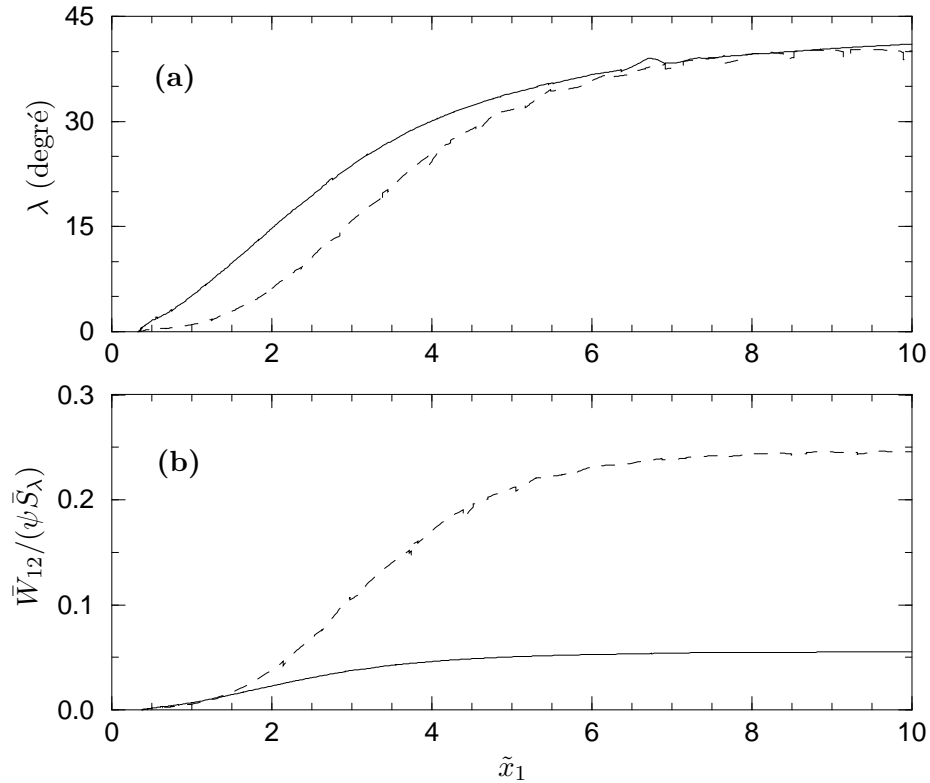


**Fig. 8.3 :** Comparaison, à la convergence du problème couplé, des écoulements à température isotherme (trait continu) et à température "GRIP" (tirets) : ligne de courant (a) et évolution du temps adimensionné  $\tilde{t}_s$  le long de la ligne de courant en fonction de  $\tilde{x}_1$  (b).





**Fig. 8.4 :** Evolution le long des lignes de courant, , des termes  $\tilde{\psi} \tilde{S}_{11} / 2$ ,  $\tilde{\psi} \tilde{S}_{22} / 2$ ,  $\tilde{\psi} \tilde{S}_{12} / 2$  et de la vitesse de rotation adimensionnée  $\tilde{W}_{12}$ , en fonction de  $\tilde{x}_1$ , pour les écoulements à température isotherme (trait plein) et à température "GRIP" (tirets).



**Fig. 8.5 :** Evolution le long des lignes de courant de **(a)** l'angle  $\lambda$  entre le repère de référence et le repère des contraintes principales, et du **(b)** rapport  $\bar{W}_{12}/(\psi \bar{S}_\lambda)$  en fonction de  $\tilde{x}_1$  pour les écoulements, à la convergence du problème couplé, à température isotherme (trait plein) et à température "GRIP" (tirets).

"GRIP", l'évolution de l'orientation du repère des contraintes principales est légèrement plus favorable à la création d'une fabrique à maximum vertical que pour l'écoulement isotherme (*i.e.*  $\lambda$  plus faible). Cet effet est renforcé dans le cas de la température "GRIP" puisque le rapport  $\bar{W}_{12}/(\psi \bar{S}_\lambda)$  est plus de quatre fois supérieur à celui du champ de températures isotherme (*cf.* Figure 8.5b). Par conséquent, il est logique d'obtenir une orientation du maximum de fabrique plus proche de la direction verticale dans le cas de l'écoulement à température "GRIP".

La prise en compte d'un champ de températures réaliste, tel que celui mesuré dans le forage de GRIP, conduit à des champs de fabriques dont la concentration et l'orientation sont plus proches de celles observées. L'effet d'un champ de températures tel que celui de GRIP est de localiser la déformation dans les couches profondes, ce qui conduit à moins déformer, et donc à moins texturer, les glaces de surface. Seule une étude à l'échelle de la calotte polaire peut aboutir à ce résultat puisqu'une étude locale montre simplement que si la température augmente, la vitesse de déformation, et la vitesse avec laquelle la fabrique se concentre, augmentent aussi.

### 8.3.2 Influence du comportement du grain

Dans les comparaisons décrites précédemment, le comportement du grain était tel que  $\beta = 0.25$  et  $\gamma = 1.0$ . La raison de ce choix vient du fait que, lorsque le champ de températures est isotherme, le fait d'adopter une valeur inférieure pour  $\beta$  conduit à un champ de fabriques dont les maximums d'orientation sont défavorables à la déformation. L'explication de ce résultat est que, lorsque  $\beta$  diminue, la vitesse de rotation plastique du grain augmente et par conséquent la vitesse de rotation du grain diminue et le maximum d'orientation est décalé par rapport à la verticale (*i.e.* le paramètre d'orientation  $\varphi^o$  augmente). Numériquement, nous n'obtenons pas la convergence du problème couplé pour des valeurs de  $\beta$  inférieures à 0.2 lorsque le champ de températures est isotherme, car ces essais conduisent à des instabilités numériques lorsque le matériau devient trop difficile à déformer à cause de sa mauvaise orientation. Ces phénomènes disparaissent lorsqu'on adopte le champ de températures "GRIP".

Par conséquent, nous ne montrons ici que l'influence du comportement du grain pour le champ de températures "GRIP". Nous étudions l'influence du paramètre  $\beta$ , en comparant les écoulements obtenus avec  $\beta = 0.25$  et  $\beta = 0.1$ ,  $\gamma = 1.0$  et  $\psi$  calculé par (4.27) pour une même valeur de  $B_1$ , soit  $\psi = 1.82B_1$  et  $\psi = 2.17B_1$ , respectivement.

La première remarque concerne le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence du problème couplé. En adoptant le même champ de fabriques initial "GRIP", lorsque  $\beta = 0.25$  la convergence est obtenue en 32 itérations, alors que pour  $\beta = 0.1$  il en faut 63.

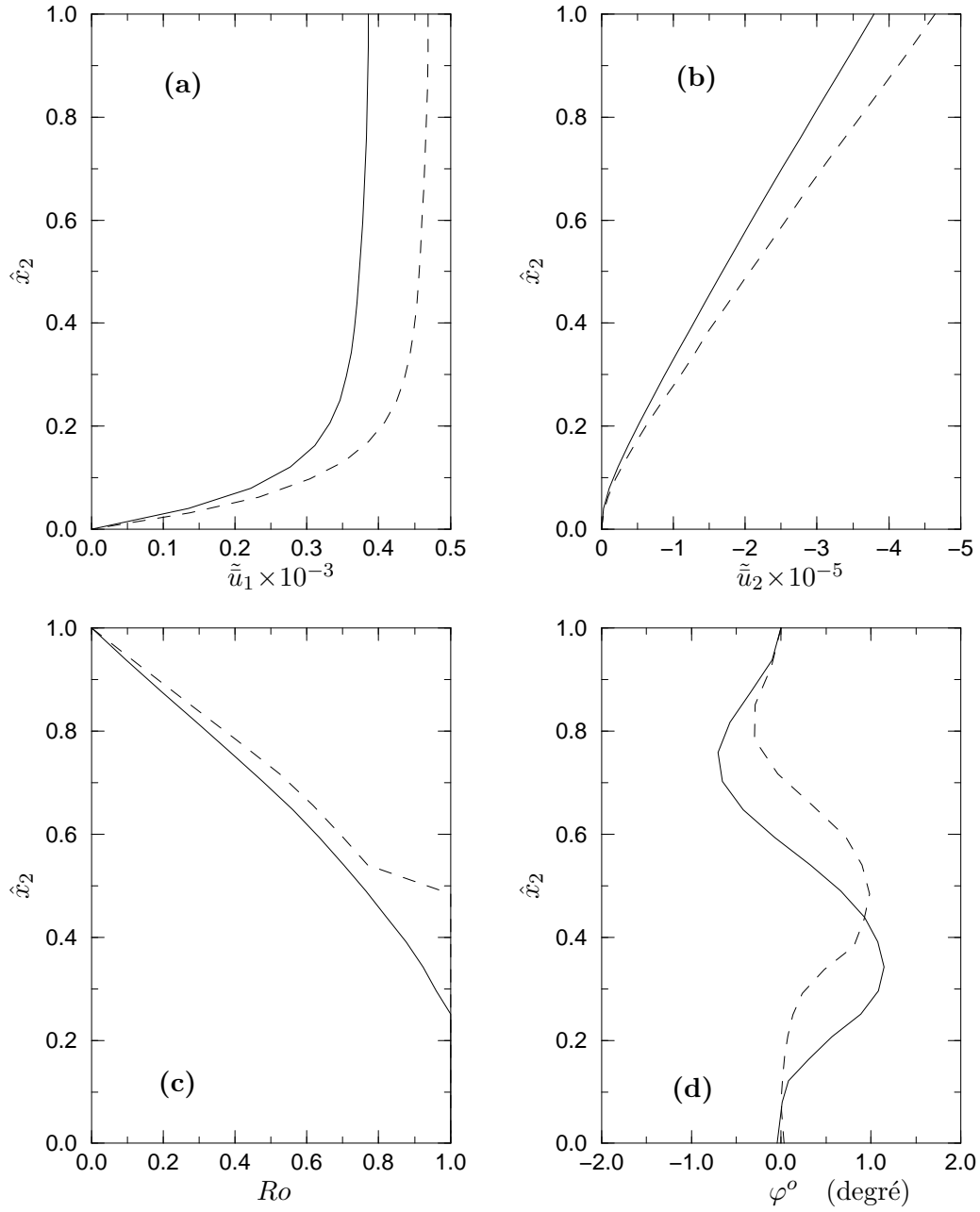
Sur la Figure 8.6 sont tracés les profils de vitesses et de fabriques obtenus, à la convergence du problème couplé, pour les deux comportements de grain. Nous constatons que la vitesse de l'écoulement augmente avec l'anisotropie du grain (*i.e.* lorsque  $\beta$  diminue), résultat similaire à ceux obtenus au paragraphe 6.5.4. Plus le grain est anisotrope (*i.e.* plus  $\beta$  est petit), plus l'anisotropie du polycristal est importante. Lorsque la fabrique est concentrée selon un maximum vertical, ceci a pour conséquence directe d'augmenter la fluidité en cisaillement et par suite la vitesse de l'écoulement. Rappelons que les résultats que nous présentons ici sous-estiment l'influence de l'anisotropie sur l'augmentation des vitesses par rapport à la réalité pour laquelle le rapport  $\psi/B_1$  est de l'ordre de 10.

Pour les deux comportements de grain, nous obtenons une fabrique dont le maximum d'orientation est proche de la verticale, puisque la déviation maximum par rapport à la verticale est de l'ordre de  $1^\circ$ . La concentration de la fabrique est légèrement supérieure lorsque  $\beta = 0.1$ . Ceci est en accord avec les résultats des chapitres précédents où nous avons vu que plus le grain est anisotrope plus l'évolution de la fabrique est rapide.

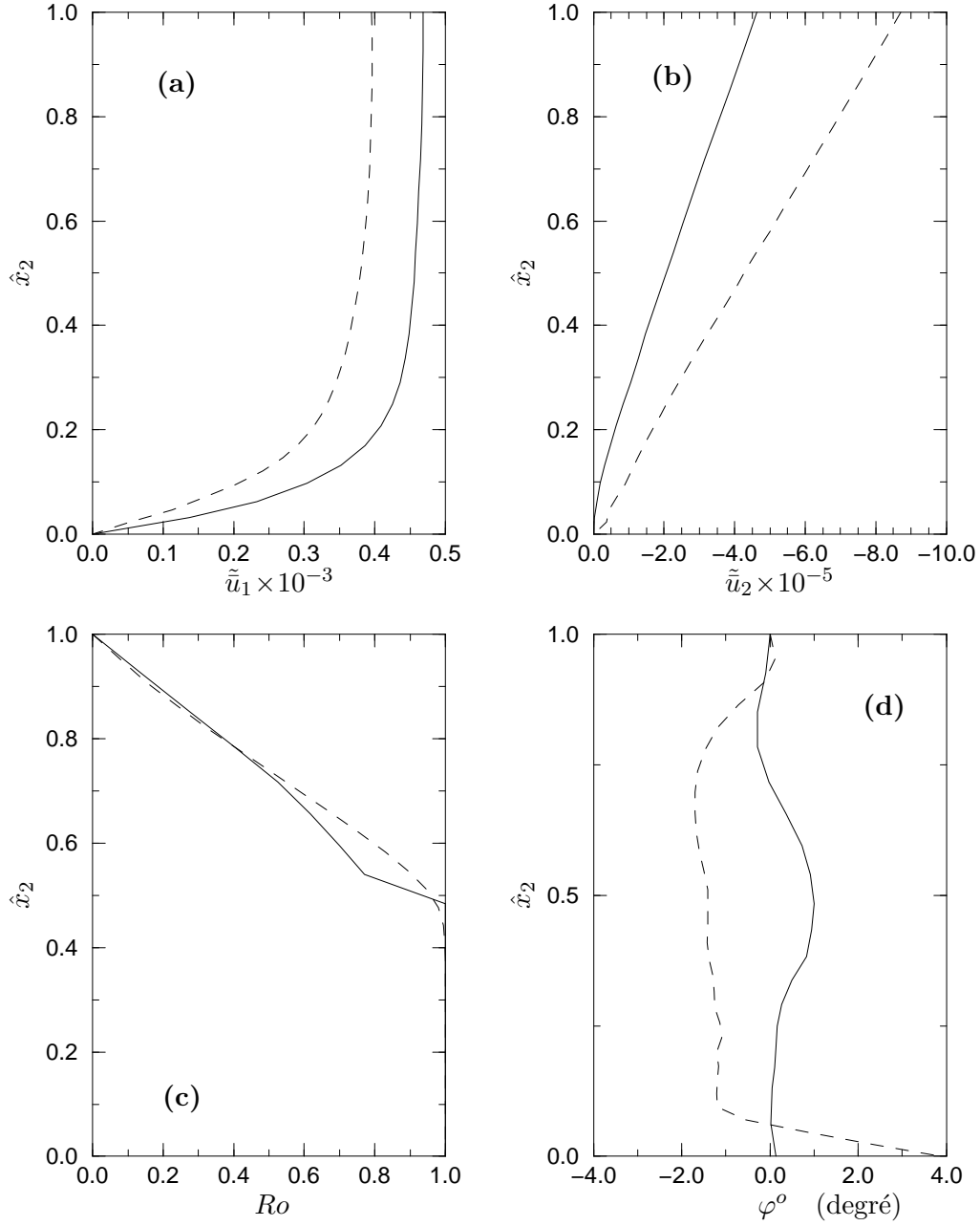
### 8.3.3 Influence du type de l'écoulement

Nous comparons l'influence du type de l'écoulement, déformations planes ou axisymétrique, sur la formation de la fabrique à la convergence du problème couplé. Pour cette comparaison, le champ de températures est celui de "GRIP" et le comportement du grain est tel que  $\beta = 0.1$  et  $\gamma = 1.0$ .

Comme au paragraphe 6.5.5, nous vérifions bien que si les vitesses horizontales sont similaires pour les deux écoulements, la vitesse verticale de l'écoulement axisymétrique est approximativement le double de celle de l'écoulement plan (*cf.* Figure 8.7). Par



**Fig. 8.6 :** Comparaison des champs de vitesses et fabriques obtenus pour les comportements de grain  $\beta = 0.25$  (trait plein) et  $\beta = 0.1$  (tirets), avec  $\gamma = 1.0$  pour les deux. Les figures présentent l'évolution de  $\tilde{u}_1$  (a),  $\tilde{u}_2$  (b),  $Ro$  (c) et  $\varphi^o$  (d) en fonction de la profondeur réduite  $\hat{x}_2$  en  $\tilde{x}_1 = 10$ .



**Fig. 8.7 :** Comparaison des champs de vitesses et fabriques à la convergence du problème couplé pour les écoulement plan (trait plein) et axisymétrique (tirets), pour un comportement de grain tel que  $\beta = 0.1$  et  $\gamma = 1.0$  et le champ de températures "GRIP". Les figures présentent l'évolution de  $\tilde{u}_1$  (a),  $\tilde{u}_2$  (b),  $Ro$  (c) et  $\varphi^o$  (d) en fonction de la profondeur réduite  $\hat{x}_2$  en  $\tilde{x}_1 = 10$ .

conséquent, pour maintenir la surface libre comme surface de l'écoulement stationnaire, il faut imposer, pour l'écoulement axisymétrique, une accumulation deux fois plus importante que pour l'écoulement plan.

Sur la Figure 8.7c, nous observons que l'écoulement axisymétrique entraîne une évolution de la concentration de la fabrique très similaire à celle de l'écoulement plan. L'étude des trois paramètres  $k_i$  de l'ODF montre que l'écoulement axisymétrique conduit à des fabriques qui présentent une symétrie de révolution. Nous vérifions que  $k_2$ , qui donne la concentration de la fabrique dans la direction  $\mathbf{e}_2$ , est le plus petit des trois paramètres pour les deux écoulements ( $k_2 < 1$ ). Par contre, nous observons que pour l'écoulement axisymétrique les valeurs de  $k_1$  et  $k_3$  sont voisines l'une de l'autre et qu'elles sont toutes les deux supérieures à 1, tandis que pour l'écoulement plan nous trouvons que seule  $k_1$  est supérieure à 1, la valeur de  $k_3$  étant comprise entre  $k_2$  et 1. Les fabriques de l'écoulement plan sont ovales, avec un nombre de grains dont l'axe- $c$  est proche du plan perpendiculaire au plan de l'écoulement plus élevé que le nombre de grains dont l'axe- $c$  est proche du plan de l'écoulement. La condition de déformations planes induit une contrainte déviatoire  $\bar{S}_{33}$  de compression, dès que la fabrique n'est plus isotrope, et par conséquent les grains tournent légèrement vers la direction  $\mathbf{e}_3$ , ce qui se traduit par  $k_3 < 1$ . Pour l'écoulement axisymétrique, la valeur de  $\bar{S}_{33}$  est sensiblement la même que celle de  $\bar{S}_{11}$ , et elles sont toutes les deux positives (traction).

## 8.4 Application à la ligne d'écoulement GRIP-GISP2

Comme Schott *et al.* (1992), Schott Hvidberg *et al.* (1997) puis Mangeney *et al.* (1996), nous appliquons notre modèle à la ligne d'écoulement GRIP-GISP2.

### 8.4.1 Situation des forages et données de terrain

Les forages de GRIP (Greenland Ice Core Project, 3 238 m d'altitude, d'après Dansgaard *et al.* (1993)) et GISP2 (Greenland Ice Sheet Programme 2, 3 215 m d'altitude) sont situés dans la région centrale du Groenland. Ils sont localisés à 3 km et 31 km à l'ouest de la position actuelle du sommet du Groenland, respectivement. Les deux forages ont atteint le lit rocheux, et sont profonds de 3 029 m et 3 053 m, respectivement (Gow *et al.*, 1997). La transition entre Holocene-Wisconsin (11.5 ka BP<sup>3</sup>) est atteinte à la profondeur de 1 623 m (Johnsen *et al.*, 1992).

De nombreuses mesures ont été effectuées sur les deux carottes et en surface dans cette région. Certaines de ces données vont nous servir comme entrées du modèle, tandis que les autres seront utilisées pour valider les sorties du modèle.

#### 8.4.1.1 Entrées du modèle

Nous donnons ici les hypothèses de la modélisation :

- l'écoulement est supposé stationnaire et la topographie de la surface est imposée. La recherche de la surface libre n'est pas effectuée, et nous regarderons si les taux d'accumulation nécessaires pour assurer la stationnarité sont équivalents à ceux

---

<sup>3</sup>Before Present

mesurés. La topographie adoptée pour la surface est un profil de Vialov dont le dôme est à  $3\text{ km}$  de GRIP et qui passe par les deux forages GRIP et GISP2. Le maillage ( $N_{b1} = 60$ ,  $N_{b2} = 15$ , soit 7351 nœuds) a une longueur de  $184\text{ km}$ . Le front (en  $x = -181\text{ km}$ ) est une surface libre, mais cette condition n'influence pas l'écoulement au niveau des forages puisqu'elle est imposée à  $153\text{ km}$  de GISP2, soit à plus de 50 épaisseurs de glace.

- la topographie du lit rocheux adoptée est celle mesurée par Hodge *et al.* (1990) en tenant compte des précisions apportées par Hempel et Thyssen (1992) et Jacobel et Hodge (1995). Pour  $x_1 < -40\text{ km}$ , le lit rocheux est supposé horizontal.
- l'écoulement est modélisé en faisant l'hypothèse de déformations planes et il présente un axe de symétrie vertical au dôme (en  $x_1 = 3\text{ km}$ ).
- le comportement du grain, orthotrope de révolution linéaire, est tel que  $\beta = 0.25$ ,  $\gamma = 1.0$ , et la fluidité dans le plan de base  $\psi$  est choisie de façon obtenir un âge de  $14\,450\text{ a}$  à la profondeur de  $1\,753.4\text{ m}$  dans le forage de GRIP (Johnsen *et al.*, 1992). En un point de la calotte, le comportement orthotrope linéaire du polycristal de glace est obtenu par homogénéisation en supposant une répartition homogène des contraintes et en adoptant l'ODF paramétrée (3.34) pour décrire la fabrique.
- le profil de température est celui mesuré à GRIP (*cf.* 6.4) et il est supposé ne pas varier en fonction de l'abscisse. Nous supposons donc que la variation de température en fonction de la hauteur réduite est identique sur tout le domaine. Cette hypothèse est justifiée par la similitude des profils de température de GRIP et GISP2 (The Greenland Summit Ice Cores CD-ROM, 1997), ainsi que par les résultats de modèles qui résolvent l'équation de la conservation de la chaleur (Schott Hvidberg *et al.*, 1997).
- afin de diminuer le volume des calculs, mais aussi à cause de la mauvaise définition du maillage et de la condition de surface libre appliquée au front (en  $x_1 = -181\text{ km}$ ), le calcul de la fabrique est réalisé seulement sur le domaine  $-38 \leq x_1 \leq 3\text{ km}$ , et le profil de fabrique obtenue en  $x_1 = -38\text{ km}$  est appliqué jusqu'à  $x_1 = -181\text{ km}$ , de la même façon qu'est construit le champ de fabriques "GRIP" au paragraphe 6.5.1.1.

#### 8.4.1.2 Contrôle des résultats

Pour contrôler la validité de nos résultats, nous utiliserons :

- les mesures de la fabrique (notamment de sa concentration par l'intermédiaire de  $Ro$ , donné par Thorsteinsson *et al.* (1997)) dans le forage de GRIP. Pour le forage de GISP2, peu de mesures sont disponibles, mais l'évolution et la forme des fabriques semblent être très similaires à celles de GRIP (Anandakrishnan *et al.*, 1994; Gow *et al.*, 1997).
- la datation des deux carottages obtenue par identification et comptage des couches annuelles (visuellement, par observation des poussières volcaniques, par mesure de

la conductivité, ... d'après Johnsen *et al.*, 1992; Meese *et al.*, 1997).

- les valeurs d'accumulation déduites de l'étude de l'amincissement des couches de glace dans les forages de GRIP et GISP2, soit  $0.23 \text{ ma}^{-1} \text{ eq. glace}$  au site de GRIP (Dahl-Jensen *et al.*, 1993) et  $0.245 \text{ ma}^{-1} \text{ eq. glace}$  à GISP2 (Meese *et al.*, 1994). Nous avons aussi utilisé la carte d'accumulation de Bolzan et Strobel (1994) qui donne l'accumulation moyenne entre 1957 et 1987 dans la région centrale du Groenland.
- les mesures de vitesses en surface réalisées entre 1993 et 1994 le long de la ligne d'écoulement de GRIP à GISP2 (Waddington *et al.*, 1995; Keller *et al.*, 1995).

#### 8.4.2 Vitesses

Rappelons que le calcul du champ de fabriques est indépendant de la valeur de  $B_1$  puisqu'il est conduit sous forme adimensionnée. Dans la suite, les quantités présentées sont dimensionnées, et elles sont déterminées à partir des quantités adimensionnées par les relations du Tableau 6.1.

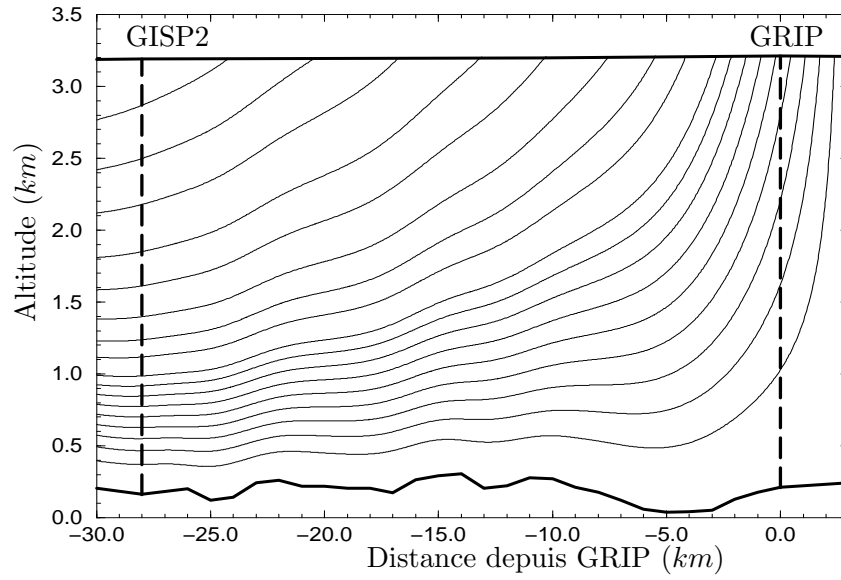
La valeur de la fluidité dans le plan de base des grains  $\psi$  est choisie de façon à obtenir un âge de  $14\,450 \text{ a}$  à la profondeur de  $1\,753.4 \text{ m}$  dans le forage de GRIP (Johnsen *et al.*, 1992). Avec cette condition, nous obtenons une valeur du paramètre de la loi de Glen de  $B_1 = 0.09 \text{ MPa}^{-1} \text{ a}^{-1}$  (à  $-10^\circ\text{C}$ ), soit inférieure aux valeurs de la littérature présentées au paragraphe 1.3.1.2 (d'après Lipenkov *et al.* (1997),  $B_1(-10^\circ\text{C}) = 0.16 \pm 0.07 \text{ MPa}^{-1} \text{ a}^{-1}$ ).

Pour cette valeur de  $B_1$ , les vitesses horizontales obtenues en surface sont supérieures à celles mesurées par Waddington *et al.* (1995) et Keller *et al.* (1995). Par contre, c'est l'inverse pour l'accumulation, puisque nous obtenons des taux d'accumulation légèrement inférieurs à ceux mesurés par Dahl-Jensen *et al.* (1993), Meese *et al.* (1994) et Bolzan et Strobel (1994). Ces valeurs restent néanmoins proches des valeurs mesurées. D'après les résultats obtenus au paragraphe 6.5.5, l'écoulement plan donne, pour une même valeur des vitesses horizontales, des vitesses verticales approximativement deux fois plus faibles que l'écoulement axisymétrique. Par conséquent, nous vérifions bien que l'écoulement réel entre GRIP et GISP2 se situe entre ces deux types d'écoulements 2D.

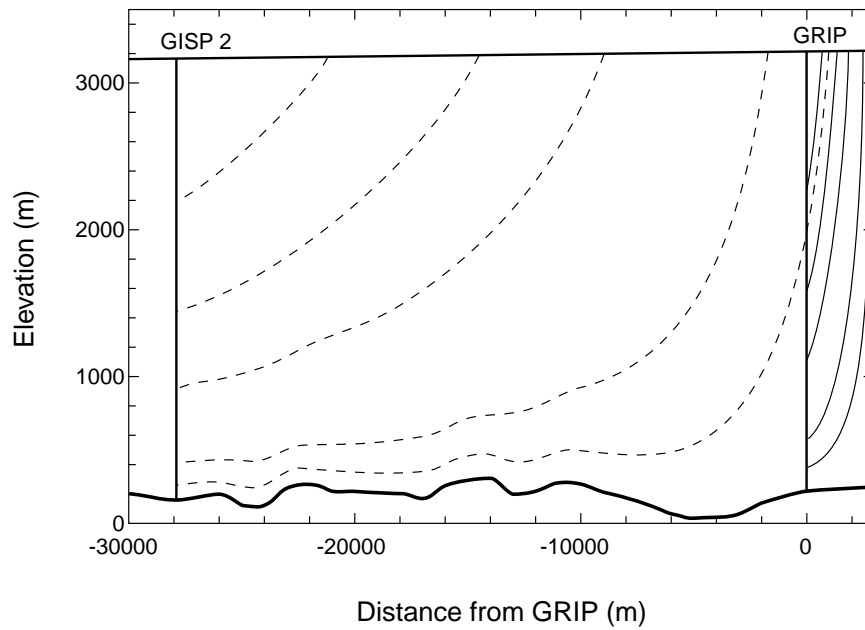
La Figure 8.8 présente les lignes de courant entre GRIP et GISP2. Il apparaît que les ondulations du lit rocheux sont transmises jusqu'à la surface. Comme nous imposons un profil de surface lissé (donné par la formule de Vialov (6.25)), la condition de stationnarité de la surface libre entraîne des oscillations de l'accumulation le long de la surface (*cf.* Figure 8.11b). Notons que la recherche de la surface libre correspondant à un taux d'accumulation donné (Mangeney, 1996) conduirait à une surface libre affectée par les oscillations du profil du lit rocheux.

La comparaison des profils de vitesses de la Figure 8.11 avec ceux obtenus par Schott Hvidberg *et al.* (1997), visibles sur la Figure 8.10, montre l'influence du choix du type de l'écoulement. Le modèle de Schott Hvidberg (1996), appliqué par Schott Hvidberg *et al.* (1997) à la ligne d'écoulement GRIP-GISP2, tient compte de la divergence de l'écoulement, déterminée à partir de l'observation de la topographie de la surface. Sur les Figures 8.9 et 8.10 sont présentés les lignes de courant et les profils de vitesses obtenus par Schott Hvidberg *et al.* (1997). Comme ces derniers, nous trouvons que la

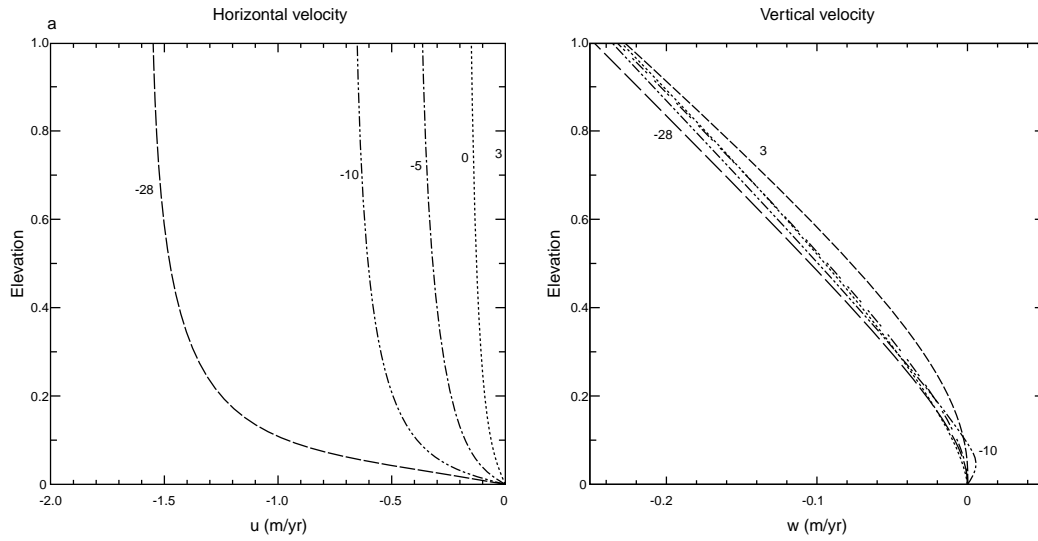




**Fig. 8.8:** Lignes de courant obtenues à la convergence du problème couplé.



**Fig. 8.9:** Lignes de courant données par Schott Hvidberg et al. (1997).



**Fig. 8.10 :** *Profils de vitesses verticales et horizontales donnés par le modèle de Schott Hvidberg et al. (1997).*

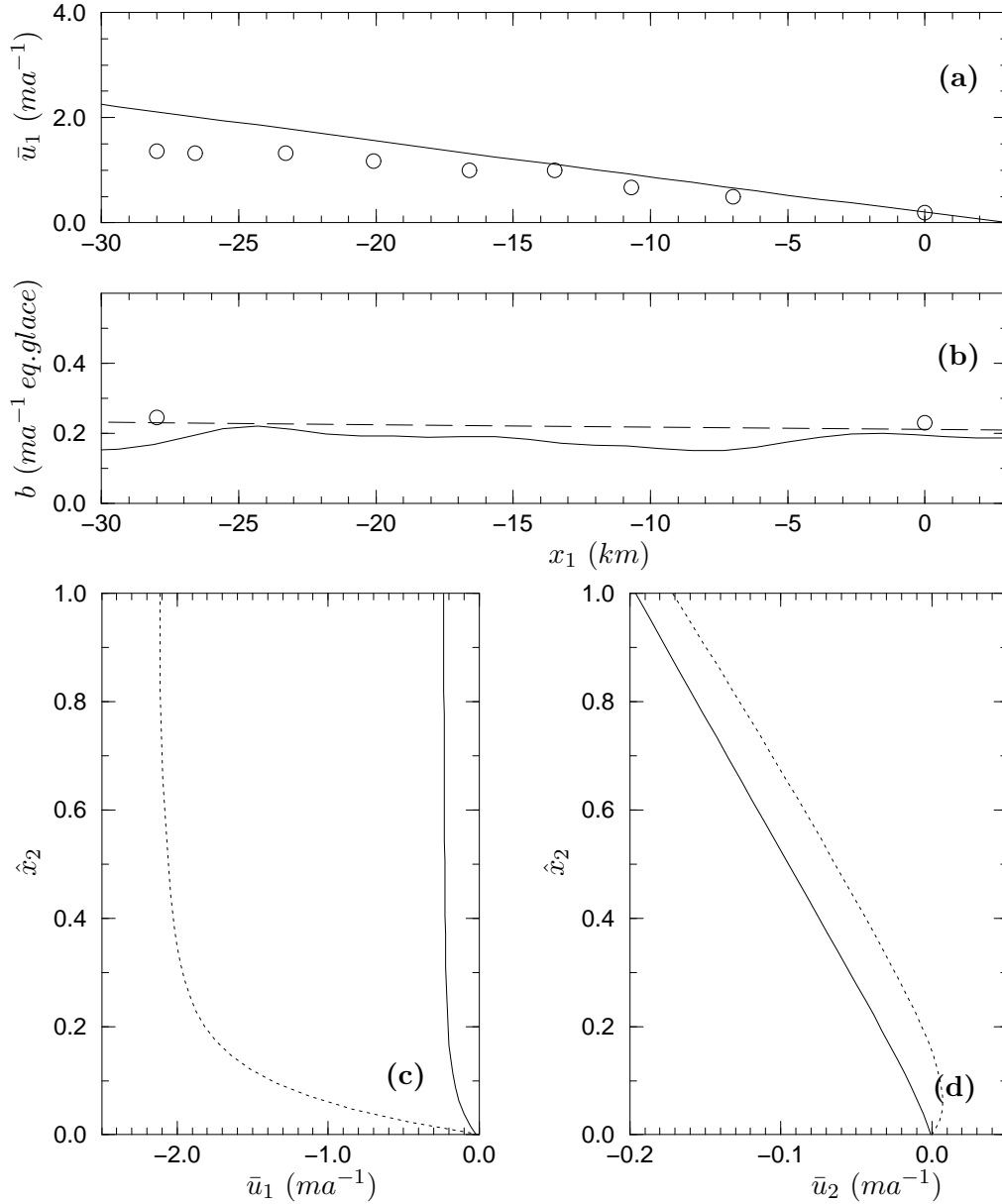
valeur du rapport  $\bar{u}_1/\bar{u}_2$  est approximativement multiplié par 10 entre GRIP et GISP2. Cependant, les rapports  $\bar{u}_1/\bar{u}_2$  que nous obtenons sont deux fois plus grands. D'après les résultats présentés au paragraphe 6.5.5 sur l'influence du type de l'écoulement, il est normal d'observer cette différence entre notre modèle et celui de Schott Hvidberg *et al.* (1997), puisque ce dernier reproduit un écoulement situé entre les écoulements plan et axisymétrique. La conséquence de cette différence sur les vitesses verticales est directement visible sur les lignes de courant, qui descendent beaucoup plus profond avec le modèle de Schott Hvidberg *et al.* (1997) qu'avec le notre (*cf.* les Figures 8.9 et 8.8).

### 8.4.3 Fabrique

La Figure 8.12 présente l'évolution de la fabrique ( $Ro$  et  $\varphi^\circ$ ) dans le forage de GRIP (trait plein) et la courbe  $Ro$  dans le forage de GISP2 (tirets) obtenus avec le modèle. Nous observons qu'il y a très peu de différence sur la concentration de la fabrique entre les deux forages distants de 28 km.

Sur cette même figure, nous avons reporté les valeurs des concentrations de la fabrique  $Ro$  mesurées par Thorsteinsson *et al.* (1997) dans le forage de GRIP. Les résultats que nous obtenons donnent une concentration de la fabrique légèrement inférieure à celle mesurée jusqu'à 1000 m de profondeur. Pour des profondeurs supérieures, et jusqu'à 2800 m, la concentration de la fabrique obtenue est en accord avec celle mesurée par Thorsteinsson *et al.* (1997). Nous ne reproduisons évidemment pas les fabriques de recristallisation discontinue observées pour des profondeurs supérieures à 2800 m de profondeur.

Pour comparaison, nous avons reporté sur la Figure 8.12a l'évolution de  $Ro$  obtenue au paragraphe 5.3 avec le modèle "1D", pour un même comportement de grain ( $\beta = 0.25$  et  $\gamma = 1.0$ ). Rappelons que le modèle "1D" suppose que la déformation est une



**Fig. 8.11 :** (a) Vitesse horizontale en surface, (b) accumulation sur la surface, (c) profils verticaux de vitesses horizontales et (d) de vitesses verticales, en fonction de la profondeur réduite  $\hat{x}_2$  dans les forages de GRIP (trait continu) et GISP2 (tirets) à la convergence du problème couplé. Les cercles représentent les valeurs mesurées en surface : accumulation à GRIP (Dahl-Jensen et al., 1993), accumulation à GISP2 (Meese et al., 1994) et vitesses horizontales en surface (Keller et al., 1995). Les accumulations représentées par des tirets sont extraites de la carte d'accumulation proposée par Bolzan et Strobel (1994).

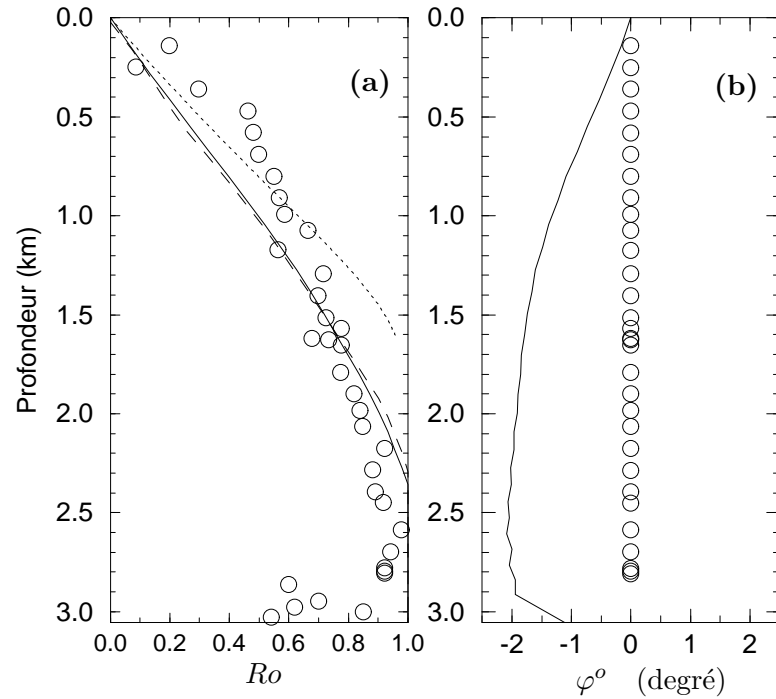
compression verticale et que la vitesse de déformation verticale est constante jusqu'à la profondeur de 1 750 m, puis qu'elle décroît linéairement pour s'annuler au contact du lit rocheux (Dahl-Jensen *et al.*, 1993). Comme nous l'avions remarqué au paragraphe 5.3, le modèle "1D" conduit à une évolution de la concentration de la fabrique beaucoup trop rapide pour des profondeurs supérieures à 1 000 m, que ce soit avec notre modèle à contraintes homogènes ou avec le modèle auto-cohérent de Castelnau *et al.* (1996a). Pour expliquer la différence entre ces résultats, nous avons tracé sur la Figure 8.13 l'évolution des vitesses de déformation  $\bar{D}_{11}$ ,  $\bar{D}_{22}$  et  $\bar{D}_{12}$  dans le forage de GRIP, en fonction de la profondeur. Notons que ce ne sont pas exactement les vitesses de déformations subies par les glaces se trouvant à l'aplomb de GRIP, et qui arrivent selon des trajectoires (non verticales) issues de la surface entre le dôme et GRIP. Sur cette figure, nous observons que la vitesse de déformation  $\bar{D}_{22}$  est constante de la surface jusqu'à la profondeur de 2 400 m, soit 650 m plus profond que dans le modèle de Dahl-Jensen *et al.* (1993). Par contre, l'hypothèse de compression uniaxiale n'est plus valable à partir de 2 000 m de profondeur où la contrainte de cisaillement n'est plus nulle. Il apparaît clairement que, pour des profondeurs supérieures à 2 500 m, la glace subit un fort cisaillement malgré la condition de symétrie du dôme situé à 3 km de GRIP. Le calcul d'évolution pouvant être mené sous forme adimensionnée, seuls le champ de températures, la géométrie de la calotte et le comportement du grain ( $\beta$  et  $\gamma$ ) ont une influence sur le champ de fabriques obtenu avec notre modèle. Par conséquent, c'est uniquement la différence de répartition des vitesses de déformation en fonction de la profondeur qui est responsable de la différence d'évolution de la fabrique observée entre le modèle couplé et le modèle "1D". En adoptant pour le modèle "1D" les vitesses de déformation obtenues ici, l'évolution de la fabrique devrait être moins rapide qu'avec la vitesse de déformation donnée par le modèle de Dahl-Jensen *et al.* (1993). Néanmoins, il ne serait toujours pas possible de prendre en compte les vraies trajectoires des polycristaux se trouvant actuellement à l'aplomb du forage de GRIP.

Ces résultats, obtenus pour un comportement de grain moins anisotrope que celui observé, ne mettent pas en doute le facteur ralentissant sur l'évolution de la fabrique de la progressive polygonisation des grains (Castelnau *et al.*, 1996b). Cependant, la comparaison des évolutions de la fabrique obtenues avec les modèles "1D" et couplé, pour un même comportement de grain, montrent que les conditions de l'écoulement influence notablement l'évolution de la fabrique.

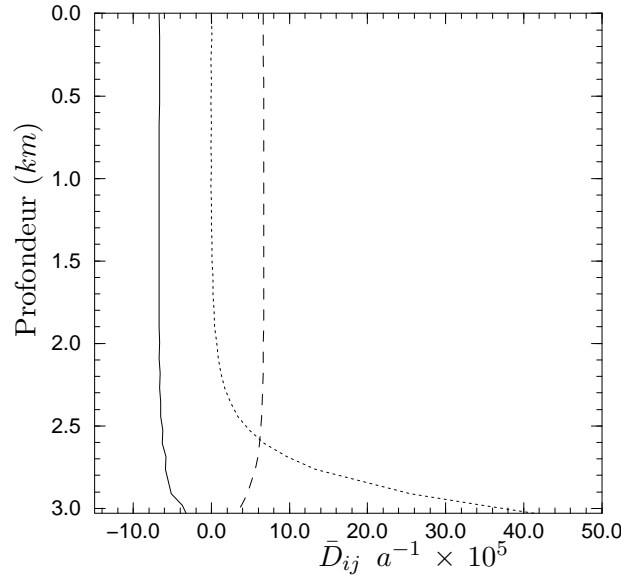
L'inclinaison du maximum d'orientation obtenu avec le modèle est visible sur la Figure 8.12. Sa valeur maximum est de 2° par rapport à la verticale. Ceci est compatible avec les textures observées dont la déviation de la moyenne des orientations des cristaux par rapport à la verticale est généralement comprise entre 1° et 6° (Thorsteinsson *et al.*, 1997).

#### 8.4.4 Datation

Nous proposons une datation des forages de GRIP et GISP2 correspondant aux champs de fabriques et de vitesses calculés avec le modèle couplé. Nous obtenons une évolution de l'âge en fonction de la profondeur quasi-linéaire dans la première moitié du forage et une brusque augmentation de l'âge à l'approche du lit rocheux, où la condition d'adhérence conduit à un âge infini au fond.



**Fig. 8.12 :** (a) Evolution de la concentration de la fabrique  $Ro$  dans les forages de GRIP (trait continu) et GISP2 (tirets) obtenu à la convergence du problème couplé et (b) évolution de l'inclinaison par rapport à la verticale du maximum d'orientation  $\varphi^o$  dans le forage de GRIP (trait continu). Les cercles représentent les valeurs mesurées par (Thorsteinsson et al., 1997). Sur la figure (a) est représentée en pointillé l'évolution de  $Ro$  obtenue avec les hypothèses du modèle "1D" présenté au paragraphe 5.3 (pour un même comportement de grain).



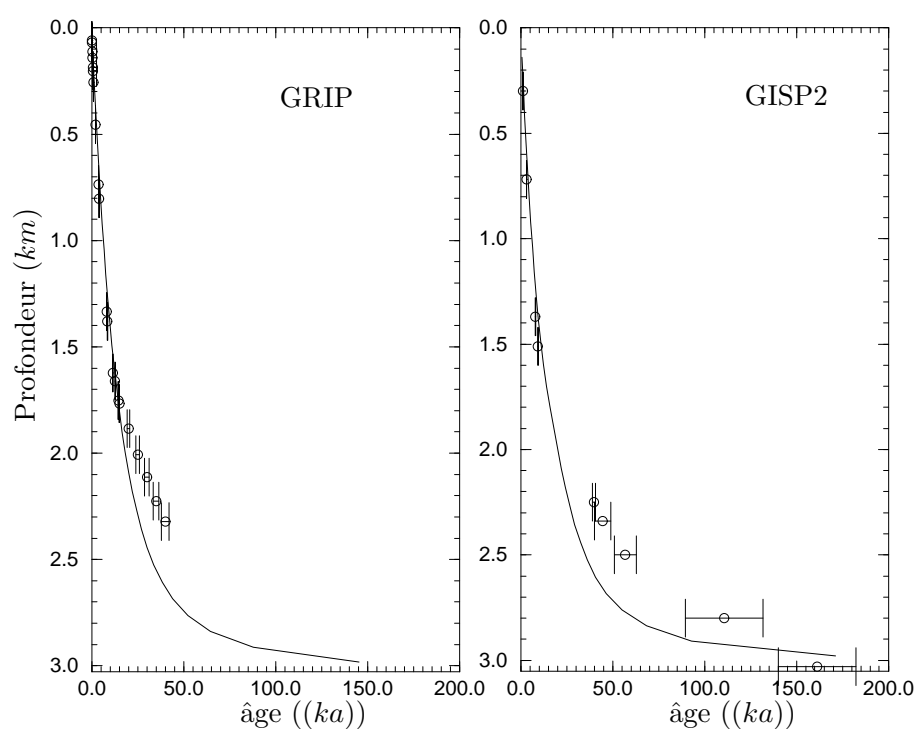
**Fig. 8.13 :** Evolution des vitesses de déformation en fonction de la profondeur dans le forage de GRIP :  $\bar{D}_{22}$  (trait continu),  $\bar{D}_{11}$  (tirets) et  $\bar{D}_{12}$  (pointillé) à la convergence du problème couplé.

La valeur de  $B_1$  ayant été choisie pour obtenir un âge de 14 450  $a$  à la profondeur de 1 753.4  $m$  dans le forage de GRIP, nous vérifions bien que la courbe de datation obtenue concorde jusqu'à cette profondeur avec les mesures effectuées dans ce forage. La courbe de datation obtenue pour le forage de GISP2 donne, elle aussi, une datation correcte jusqu'à la profondeur de 1 500  $m$ . Pour des profondeurs supérieures et pour les deux forages, les âges prédits par le modèle sont plus jeunes que ceux donnés par les datations effectuées par Johnsen *et al.* (1992) et Meese *et al.* (1997). Dans le forage de GISP2, nous obtenons un âge inférieur jusqu'à l'avant dernier point daté à 2 800  $m$ , et ceci malgré la condition de vitesse nulle au fond. Sur les mesures de datation du forage de GRIP, on observe un changement de courbure de la courbe âge-profondeur au niveau de la transition Holocene-Wisconsin à 1 650  $m$  de profondeur. Nos courbes ne reproduisent pas ce changement brutal puisque les propriétés du matériau, la fabrique et la température, évoluent continûment en fonction de la profondeur dans notre modèle.

Notons enfin, que la durée nécessaire à ce calcul couplé appliqué à la ligne d'écoulement GRIP-GISP2 est, sur notre station HP9000-712/80, inférieure à 10 heures. Ceci montre que l'objectif de construire un modèle applicable de façon pratique au calcul de l'écoulement bidimensionnel d'une calotte polaire a été atteint.

## 8.5 Conclusion

Les méthodes numériques permettant le calcul des vitesses et de la fabrique, mises en place dans les deux chapitres précédents, ont été couplées pour déterminer les champs de vitesses et de fabriques d'un écoulement stationnaire de géométrie fixée.



**Fig. 8.14 :** Evolution de l'âge de la glace en fonction de la profondeur dans les forages de GRIP et GISP2 obtenue à la convergence du problème couplé (courbes). Les cercles représentent les datations proposées par Johnsen et al. (1992) et Meese et al. (1997).

Pour une géométrie de calotte simplifiée, dont le lit rocheux est plat, nous montrons clairement l'influence du champ de températures sur la formation des fabriques. Un champ de températures tel que celui observé dans le forage de GRIP conduit à une localisation de la déformation dans les glaces profondes et, par conséquent, à une évolution de la concentration de la fabrique beaucoup plus lente que si la température était isotherme.

Pour ces mêmes conditions de géométrie, nous montrons que plus le comportement du grain est anisotrope plus l'évolution de la concentration de la fabrique est rapide au sein de la calotte polaire, comme nous l'avions déjà observé à l'échelle du polycristal au **Chapitre 5**. Pour reproduire les fabriques observées nous devons adopter un comportement de grain dont l'anisotropie est plus faible que celle observée expérimentalement.

Finalement, nous avons appliqué le calcul couplé à la ligne d'écoulement allant de GRIP à GISP2, montrant ainsi que notre modèle satisfait aux critères de rapidité et faisabilité, énoncés dans l'introduction de ce manuscrit, lui permettant d'être utilisé pour d'écrire l'écoulement et l'évolution de la fabrique à l'échelle d'une calotte polaire. A la convergence du problème couplé, nous obtenons une évolution de la fabrique beaucoup plus proche de celle observée dans le forage de GRIP que celle que nous obtenons, pour un même comportement de grain, en supposant que la déformation est seulement une compression verticale dont l'évolution est donnée par le modèle de Dahl-Jensen *et al.* (1993). Cette étude montre la nécessité de prendre en compte l'écoulement dans sa globalité pour modéliser le développement des fabriques au sein des calottes polaires.



# Conclusion

Au cours de ce travail, nous avons mis en place les outils nécessaires à l'élaboration d'un modèle qui détermine les champs de vitesses et de fabriques de l'écoulement bidimensionnel stationnaire d'une calotte polaire de géométrie donnée.

A l'échelle du grain (**Chapitre 2**), nous avons formulé la loi de comportement linéaire, orthotrope de révolution, proposée par Meyssonier et Philip (1996), sous forme invariante par changement de référentiel et nous l'avons étendue au cas non linéaire. Cette loi de comportement suppose que le cristal de glace présente une symétrie de révolution par rapport à son axe  $-c$  et elle dépend de trois paramètres qui permettent de décrire une gamme d'anisotropie allant de l'isotropie jusqu'au cas où le grain ne se déforme que par glissement dans ses plans de base. Dans le cas linéaire, nous avons montré que cette loi de comportement était équivalente à celle, plus physique, mettant en jeu le glissement dans les plans cristallins basal, pyramidal et prismatique.

A l'échelle du polycristal, nous avons étendu au cas orthotrope les résultats analytiques de Lliboutry (1993), relatifs au comportement d'un polycristal orthotrope de révolution composé de grains ne se déformant que par glissement basal, l'homogénéisation étant faite sous l'hypothèse d'une répartition homogène des contraintes. Nos résultats pour un polycristal orthotrope, linéaire et non-linéaire ( $n = 3$ ), ont été obtenus en supposant le comportement du grain orthotrope de révolution, ce qui conduit à un comportement du polycristal plus réaliste (**Chapitre 4**).

Deux méthodes de description de la fabrique ont été envisagées : la représentation par l'ensemble des orientations d'un nombre fini de grains discrets constituant le polycristal et une représentation par une fonction continue de distribution des orientations (ODF) donnant la densité relative de grains pour une orientation donnée. Nous avons montré qu'en utilisant cette deuxième représentation, et pour des chargements préservant les symétries d'orthotropie du matériau, il est possible d'obtenir une expression analytique de l'évolution de l'ODF lorsque le comportement du cristal est linéaire. Cette formulation analytique prédit des fabriques en accord avec celles attendues dans des cas de chargement simples, tels qu'une compression (axes  $-c$  concentrés selon la direction de compression), une traction (axes  $-c$  formant une couronne dans le plan perpendiculaire à la traction) ou un cisaillement pur (axe  $-c$  concentré à  $45^\circ$  de la direction de cisaillement). De cette expression analytique pour l'ODF, nous avons déduit une forme d'ODF ne dépendant que de trois paramètres et qui est adaptée à la description des fabriques observées dans les calottes polaires (**Chapitre 3**).

Pour des sollicitations de compression, traction, cisaillement pur et cisaillement simple, nous avons étudié l'évolution conjuguée du comportement et de la fabrique du polycristal linéaire. Ces tests montrent l'amélioration apportée, à l'échelle de la réponse du polycristal, par le comportement de grain orthotrope de révolution que nous avons adopté. Pour un cisaillement simple, lorsque le grain ne se déforme pas seulement par glissement dans le plan de base, nous avons montré que la fabrique évolue vers une fabrique à un seul maximum, orienté perpendiculairement à la direction du cisaillement (**Chapitre 5**).

A l'échelle de la calotte polaire, nous avons mis en place les méthodes numériques permettant de résoudre l'équation de l'équilibre pour une fabrique donnée, par la méthode des éléments finis, et l'évolution de la fabrique pour un écoulement donné, par la méthode des lignes de courant. Nous avons adopté une géométrie simplifiée bidimensionnelle de calotte polaire, en déformations planes ou axisymétrique, dont la topographie de la surface libre est supposée être celle de l'écoulement stationnaire. Nous avons quantifié l'influence sur l'écoulement à l'échelle de la calotte polaire, des champs de fabriques et de températures, du comportement du grain et du type de l'écoulement.

Nous avons montré que, lorsque la fabrique varie en fonction de la profondeur comme celle observée à GRIP, l'écoulement est approximativement deux fois plus rapide que pour de la glace isotrope à la même température (résultat conforme à celui de Mangeney, 1996). La différence entre les deux écoulements est encore amplifiée lorsque la température n'est pas isotherme, mais varie en fonction de la profondeur comme celle observée à GRIP (**Chapitre 6**).

Pour le calcul du champ de fabriques stationnaire correspondant à un écoulement donné, nous avons montré qu'il est possible d'adopter l'ODF paramétrée (3.34) pour décrire les fabriques formées par l'écoulement au sein d'une calotte polaire. Nous avons mis en place une méthode efficace, tant par le nombre restreint de données à stocker en chaque nœud du maillage aux éléments finis (trois), que par la rapidité du calcul, qui fournit le champ de fabriques stationnaire pour un champ de vitesses et un comportement de polycristal donnés (**Chapitre 7**).

A la convergence du problème couplé, qui alterne le calcul des vitesses et de la fabrique, nous obtenons les champs de vitesses et fabriques correspondants à l'écoulement stationnaire d'une calotte polaire de géométrie donnée, pour un comportement et un champ de températures donnés. L'application à une géométrie de calotte simplifiée montre l'influence du champ de températures sur la forme et la concentration des fabriques obtenues à la convergence du problème couplé.

Nous avons appliqué le modèle couplé à la ligne d'écoulement GRIP-GISP2. Pour des temps de calcul raisonnables ( $< 10$  heures sur notre station HP9000-712/80), notre modèle est utilisable dans l'état pour des applications à l'échelle des calottes polaires. Les résultats préliminaires de cette étude indiquent clairement la nécessité de prendre en compte des conditions d'écoulement réalistes dans le calcul du développement des fabriques. En effet, nous avons mis en évidence la différence entre les évolutions de la fabrique dans le forage de GRIP données par le modèle couplé et le modèle "1D" supposant que la glace se déforme en compression uniaxiale avec une vitesse de déformation donnée par le modèle de Dahl-Jensen *et al.* (1993) (**Chapitre 8**).

En conclusion de ce travail, qui est un premier pas vers la prise en compte de la fabrique comme inconnue de l'écoulement, nous pouvons proposer deux axes de développement qui sont la confrontation du modèle aux données de terrain et l'amélioration du modèle existant, ces deux voies pouvant être explorées en parallèle.

Pour les applications, nous distinguons deux domaines possibles :

- Dans le domaine de la Glaciologie, notre modèle doit être utilisé pour modéliser les écoulements en amont des forages profonds réalisés en Antarctique et au Groenland. Il serait notamment intéressant de comprendre quelle est la configuration d'écoulement qui conduit aux fabriques formées à Vostok, si différentes de celles de GRIP. L'utilisation de notre modèle permettra de proposer une datation des glaces des forages profonds qui tient compte de l'influence de l'anisotropie de la glace sur l'écoulement. Notons aussi qu'il serait intéressant d'utiliser, plutôt que la seule notion de concentration de la fabrique (le  $Ro$  de Thorsteinsson *et al.*, 1997), l'ODF paramétrée (3.34) pour caractériser les fabriques observées. Cette démarche permettrait d'obtenir des informations plus précises sur la symétrie des fabriques, mais aussi sur une éventuelle inclinaison du maximum d'orientation par rapport à la verticale.
- Pour la communauté des sciences des matériaux, notre démarche originale utilisant une ODF paramétrée pour décrire la fabrique devrait pouvoir s'appliquer à d'autres matériaux, et permettre ainsi d'augmenter la résolution des problèmes à grande échelle (par exemple en formage de pièces métalliques).

Concernant l'amélioration du modèle, les étapes successives pourront-être les suivantes :

- Recherche de la surface libre correspondant à un taux d'accumulation en surface donné.
- Implémentation dans le code éléments finis de la loi de comportement non-linéaire ( $n = 3$ ), présentée au **Chapitre 4** et en **Annexe C**, et du calcul d'évolution de la fabrique dans le cas non-linéaire.
- Amélioration du modèle d'homogénéisation, en adoptant un modèle auto-cohérent qui prenne en compte l'interaction entre le grain et le polycristal, tout en conservant notre modèle de grain et la représentation de la fabrique par une ODF.
- Développement du code pour une géométrie de calotte polaire tridimensionnelle.

Enfin, il faudra incorporer dans notre modèle de polycristal les résultats du programme en cours sur la modélisation des processus de recristallisation de la glace polaire, pour prendre en compte les effets de la polygonisation sur la cinétique de formation des fabriques, et l'occurrence dans la couche basale de la recristallisation discontinue qui a pour effet de détruire les fabriques héritées de l'histoire de la déformation.



## Annexe A

# Loi de comportement du cristal de glace

Nous donnons dans cette annexe les calculs intermédiaires qui ont permis d'établir la loi de comportement du grain proposée au **Chapitre 2**.

### Matériau linéaire incompressible orthotrope de révolution

Pour décrire le comportement des matériaux orthotropes de révolution linéaires, Boehler (1978) propose d'adopter la forme invariante engendrée par les quatre générateurs indépendants du cas orthotrope de révolution  $\mathbf{I}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{M}_3$  et  $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3\boldsymbol{\sigma})$ , soit

$$(A.1) \quad \mathbf{D} = \alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{M}_3 + \alpha_3 \boldsymbol{\sigma} + \alpha_4 (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3\boldsymbol{\sigma}),$$

où dans le cas linéaire,  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  sont des constantes et  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont uniquement fonctions des invariants  $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  et  $\text{tr}(\mathbf{M}_3\boldsymbol{\sigma})$ . La loi de comportement dépend donc de six paramètres.

Lorsque le matériau est incompressible, la condition d'incompressibilité  $\text{tr} \mathbf{D} = 0$  entraîne :

$$(A.2) \quad 3\alpha_1 + \alpha_2 + 3p\alpha_3 + 2\alpha_4 \text{tr}(\mathbf{M}_3\boldsymbol{\sigma}) = 0,$$

où  $p = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$  est la pression isotrope.

En décomposant le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  en sa partie déviatoire  $\mathbf{S}$  et isotrope  $p\mathbf{I}$ , la loi (A.1) se réécrit :

$$(A.3) \quad \mathbf{D} = (\alpha_1 + p\alpha_3)\mathbf{I} + (\alpha_2 + 2p\alpha_4)\mathbf{M}_3 + \alpha_3 \mathbf{S} + \alpha_4 (\mathbf{S}\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3\mathbf{S}).$$

Si nous supposons que la vitesse de déformation ne dépend pas de la pression isotrope  $p$ , en utilisant (A.2) et  $\text{tr}(\mathbf{M}_3\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\mathbf{M}_3\mathbf{S}) + p$ , nous obtenons l'expression (2.2) où les coefficients  $\delta_r$  sont définis à partir des coefficients  $\alpha_r$  par :

$$(A.4) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= \alpha_2 + 2p\alpha_4, \\ \delta_2 &= \alpha_3, \\ \delta_3 &= \alpha_4. \end{aligned}$$

### Intervalles de validité des paramètres $\beta$ et $\gamma$

Les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  ne peuvent pas prendre n'importe quelles valeurs. Pour déterminer les intervalles de définition des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  il est nécessaire d'exprimer le potentiel (2.12) sous forme irréductible. Pour cela, le potentiel est reformulé en fonction des cinq composantes indépendantes  $(^gS_{11} - ^gS_{22})^2$ ,  $^gS_{33}^2$ ,  $^gS_{23}^2$ ,  $^gS_{31}^2$  et  $^gS_{12}^2$  du tenseur des contraintes déviatoires. Sachant que :

$$(A.5) \quad ^gS_{11}^2 + ^gS_{22}^2 = \frac{1}{2}^gS_{33}^2 + \frac{1}{2}(^gS_{11} - ^gS_{22})^2,$$

le potentiel (2.12) se réduit à

$$(A.6) \quad \phi_S = \frac{\psi}{2} \left( ^gS_{23}^2 + ^gS_{31}^2 + \frac{\beta}{4} ((^gS_{11} - ^gS_{22})^2 + 4^gS_{12}^2) + \beta \left( \frac{\gamma + 2}{4\gamma - 1} - \frac{1}{4} \right) ^gS_{33}^2 \right).$$

Le potentiel devant rester positif, nous obtenons les conditions d'encadrement (2.13) pour  $\beta$  et  $\gamma$ .

## Annexe B

# Etude de la stabilité des positions d'équilibre des grains

Dans cette annexe, nous donnons les équations qui permettent de prédire la stabilité des positions d'équilibre des grains données par  $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(\theta_0, \varphi_0) = 0$  et  $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(\theta_0, \varphi_0) = 0$ .

En notant  $\mathbf{u}$  le vecteur de composantes  $(\dot{\theta}, \dot{\varphi})$  dans l'espace  $(\theta, \varphi)$  (*cf.* Figure B.1 pour la définition des notations), l'étude de la stabilité de la position  $(\theta_0, \varphi_0)$  revient à montrer que la partie radiale de  $\mathbf{u}$ , noté  $u_r$ , est négative, soit

$$(B.1) \quad u_r = \dot{\theta} \cos \lambda + \dot{\varphi} \sin \lambda < 0.$$

Si cette condition est vérifiée, un grain subissant une petite perturbation quelconque  $(d\theta, d\varphi)$  est ramené dans sa position initiale, et par conséquent l'équilibre peut être considéré comme stable.

En notant que

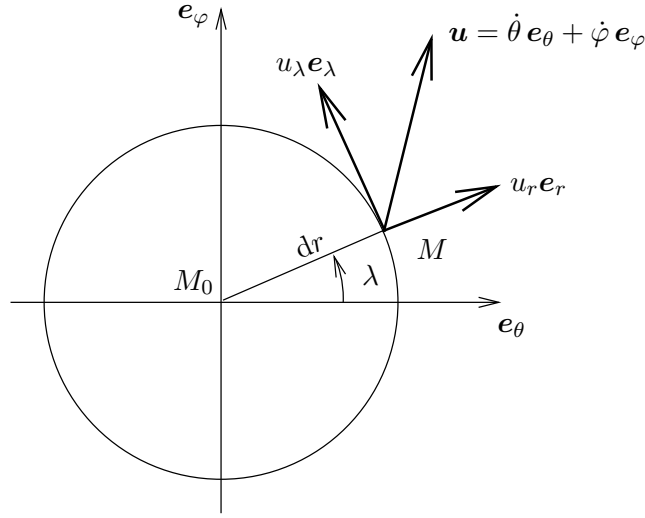
$$(B.2) \quad \begin{cases} d\theta = \cos \lambda \, dr \\ d\varphi = \sin \lambda \, dr \end{cases},$$

et

$$(B.3) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \right|_0 d\theta + \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \varphi} \right|_0 d\varphi \\ \dot{\varphi} = \left. \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \theta} \right|_0 d\theta + \left. \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} \right|_0 d\varphi \end{cases},$$

au voisinage de  $(\theta_0, \varphi_0)$  où  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  s'annulent, la condition (B.1) se réécrit :

$$(B.4) \quad \begin{aligned} u_r &= \cos^2 \lambda \, dr \left[ a + b \frac{d\varphi}{d\theta} + c \left( \frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 \right] < 0, \\ \text{ou} \quad u_r &= \sin^2 \lambda \, dr \left[ a \left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 + b \frac{d\theta}{d\varphi} + c \right] < 0. \end{aligned}$$



**Fig. B.1** : Définition des notations utilisées pour l'étude de la stabilité de l'équilibre au point  $M_0(\theta_0, \varphi_0)$ .

où

$$(B.5) \quad a = \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \right|_0, \quad b = \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \varphi} \right|_0 + \left. \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \theta} \right|_0, \quad \text{et} \quad c = \left. \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} \right|_0.$$

Le rapport  $d\varphi/d\theta$  variant de moins l'infini à plus l'infini, la position d'équilibre  $M_0$  est donc stable si, et seulement si :

$$(B.6) \quad \begin{cases} a < 0 \\ \text{ou} & c < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b^2 - 4ac < 0,$$

ou

$$(B.7) \quad a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0 \quad \text{et} \quad c < 0,$$

ou

$$(B.8) \quad c = 0 \quad \text{et} \quad b = 0 \quad \text{et} \quad a < 0,$$

soit, si et seulement si une des trois conditions (3.12), (3.13) et (3.14) est vérifiée.



## Annexe C

# Polycristal orthotrope non-linéaire

Nous donnons les résultats intermédiaires du calcul d'homogénéisation du matériau orthotrope non-linéaire ( $n = 3$ ) présentés au **Chapitre 4**.

Les vingt-deux coefficients  $\bar{a}_r$  du potentiel (4.30) sont définis uniquement à partir des trois paramètres rhéologiques du grain  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et de quatorze intégrales  $J_{pq}$  (4.9). Leur expression est donnée dans le Tableau C.1.

Les vingt-deux coefficients du potentiel (4.30) vérifient sept relations. Il est donc possible d'exprimer sept des coefficients en fonction des quinze autres. En utilisant les notations suivantes,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3, \\
 \Gamma_2 &= \alpha_2^2 \alpha_1 \alpha_3, \\
 \Gamma_3 &= \alpha_3^2 \alpha_1 \alpha_2, \\
 \Gamma_4 &= 8\alpha_1 \alpha_2 - 5\alpha_3^2, \\
 \Gamma_5 &= -(8\alpha_2^2 + 22\alpha_3^2 + 44\alpha_1 \alpha_2 + 77\alpha_1 \alpha_3 + 22\alpha_2 \alpha_3),
 \end{aligned}
 \tag{C.1}$$

les relations liant  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_{12}$  et  $\bar{a}_{13}$  aux quinze autres paramètres s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 48\bar{a}_1\Gamma_4 &= (1144\alpha_1\alpha_2 + 520\alpha_2\alpha_3 + 240\alpha_2^2)\bar{a}_6 + (1144\alpha_1\alpha_2 + 520\alpha_2\alpha_3 + 240\alpha_2^2)\bar{a}_8 + \\
 &(-520\alpha_2\alpha_3 - 240\alpha_2^2 - 1144\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{10} + (-260\alpha_3^2 + 416\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{14} + \\
 &(-3\alpha_3^2 - 104\alpha_2\alpha_3 - 224\alpha_1\alpha_2 - 48\alpha_2^2)\bar{a}_{15} + \\
 &(-384\alpha_1\alpha_2 - 208\alpha_2\alpha_3 - 46\alpha_3^2 - 96\alpha_2^2)\bar{a}_{17} + \\
 &(-266\alpha_3^2 - 32\alpha_1\alpha_2 - 96\alpha_2^2 - 208\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{20} + (3\alpha_3^2 + 104\alpha_2\alpha_3 + 224\alpha_1\alpha_2 + 48\alpha_2^2)\bar{a}_{21},
 \end{aligned}
 \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
 48\bar{a}_2\Gamma_4 &= (1144\alpha_1\alpha_2 + 520\alpha_2\alpha_3 + 240\alpha_2^2)\bar{a}_7 + (1144\alpha_1\alpha_2 + 520\alpha_2\alpha_3 + 240\alpha_2^2)\bar{a}_8 + \\
 &(-520\alpha_2\alpha_3 - 240\alpha_2^2 - 1144\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{11} + (-384\alpha_1\alpha_2 - 208\alpha_2\alpha_3 - 46\alpha_3^2 - 96\alpha_2^2)\bar{a}_{16} + \\
 &(-3\alpha_3^2 - 104\alpha_2\alpha_3 - 224\alpha_1\alpha_2 - 48\alpha_2^2)\bar{a}_{18} + (-260\alpha_3^2 + 416\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{19} + \\
 &(3\alpha_3^2 + 104\alpha_2\alpha_3 + 224\alpha_1\alpha_2 + 48\alpha_2^2)\bar{a}_{21} + (-266\alpha_3^2 - 32\alpha_1\alpha_2 - 96\alpha_2^2 - 208\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{22},
 \end{aligned}
 \tag{C.3}$$

(C.4)

$$\begin{aligned}
8\bar{a}_3\Gamma_4 = & (1144\alpha_1\alpha_2 + 520\alpha_2\alpha_3 + 240\alpha_2^2)\bar{a}_8 + (572\alpha_1\alpha_2 + 120\alpha_2^2 + 260\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_9 + \\
& (-120\alpha_2^2 - 572\alpha_1\alpha_2 - 260\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{10} + (-120\alpha_2^2 - 572\alpha_1\alpha_2 - 260\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{11} + \\
& (-128\alpha_1\alpha_2 - 63\alpha_3^2 - 48\alpha_2^2 - 104\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{15} + (-30\alpha_3^2 + 48\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{16} + \\
& (-30\alpha_3^2 + 48\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{17} + (-128\alpha_1\alpha_2 - 63\alpha_3^2 - 48\alpha_2^2 - 104\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{18} + \\
& (30\alpha_3^2 - 48\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{20} + (-160\alpha_3^2 + 256\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{21} + (30\alpha_3^2 - 48\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{22},
\end{aligned}$$

(C.5)

$$\begin{aligned}
12\bar{a}_4\Gamma_4 = & (1144\alpha_1\alpha_2 + 520\alpha_2\alpha_3 + 240\alpha_2^2)\bar{a}_8 + (572\alpha_1\alpha_2 + 120\alpha_2^2 + 260\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_9 + \\
& (-120\alpha_2^2 - 572\alpha_1\alpha_2 - 260\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{10} + (-120\alpha_2^2 - 572\alpha_1\alpha_2 - 260\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{11} + \\
& (-72\alpha_1\alpha_2 - 98\alpha_3^2 - 48\alpha_2^2 - 104\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{15} + (-30\alpha_3^2 + 48\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{16} + \\
& (40\alpha_3^2 - 64\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{17} + (-128\alpha_1\alpha_2 - 63\alpha_3^2 - 48\alpha_2^2 - 104\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{18} + \\
& (64\alpha_1\alpha_2 - 40\alpha_3^2)\bar{a}_{20} + (-125\alpha_3^2 + 200\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{21} + (30\alpha_3^2 - 48\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{22},
\end{aligned}$$

(C.6)

$$\begin{aligned}
12\bar{a}_5\Gamma_4 = & (1144\alpha_1\alpha_2 + 520\alpha_2\alpha_3 + 240\alpha_2^2)\bar{a}_8 + (572\alpha_1\alpha_2 + 120\alpha_2^2 + 260\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_9 + \\
& (-120\alpha_2^2 - 572\alpha_1\alpha_2 - 260\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{10} + (-120\alpha_2^2 - 572\alpha_1\alpha_2 - 260\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{11} + \\
& (-128\alpha_1\alpha_2 - 63\alpha_3^2 - 48\alpha_2^2 - 104\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{15} + (40\alpha_3^2 - 64\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{16} + \\
& (-30\alpha_3^2 + 48\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{17} + (-72\alpha_1\alpha_2 - 98\alpha_3^2 - 48\alpha_2^2 - 104\alpha_2\alpha_3)\bar{a}_{18} + \\
& (30\alpha_3^2 - 48\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{20} + (-125\alpha_3^2 + 200\alpha_1\alpha_2)\bar{a}_{21} + (64\alpha_1\alpha_2 - 40\alpha_3^2)\bar{a}_{22},
\end{aligned}$$

(C.7)

$$\bar{a}_{12}\Gamma_4\Gamma_5 =$$

$$\begin{aligned} & (40\alpha_3^3\alpha_2 - 660\alpha_1\alpha_3^3 - 704\alpha_1^2\alpha_2^2 - 1232\Gamma_1 - 384\alpha_1\alpha_2^3 - 1376\Gamma_2 - 1744\Gamma_3)\bar{a}_6 + \\ & (1232\Gamma_1 + 660\alpha_1\alpha_3^3 + 1376\Gamma_2 - 40\alpha_3^3\alpha_2 + 384\alpha_1\alpha_2^3 + 1744\Gamma_3 + 704\alpha_1^2\alpha_2^2)\bar{a}_8 + \\ & (240\alpha_3^2\alpha_2^2 + 660\alpha_1\alpha_3^3 + 1232\Gamma_1 + 1216\Gamma_3 + 330\alpha_3^4 + 620\alpha_3^3\alpha_2 + 704\alpha_1^2\alpha_2^2 + 320\Gamma_2)\bar{a}_9 + \\ & (-240\alpha_3^2\alpha_2^2 - 320\Gamma_2 - 1232\Gamma_1 - 660\alpha_1\alpha_3^3 - 704\alpha_1^2\alpha_2^2 - 330\alpha_3^4 - 620\alpha_3^3\alpha_2 - 1216\Gamma_3)\bar{a}_{11} + \\ & (-48\Gamma_3 + 128\alpha_1^2\alpha_2^2 + 224\Gamma_1 - 140\alpha_1\alpha_3^3 - 20\alpha_3^4)\bar{a}_{14} + \\ & (-272\Gamma_3 - 112\Gamma_1 - 78\alpha_3^4 - 64\alpha_1^2\alpha_2^2 - 64\Gamma_2 - 124\alpha_3^3\alpha_2 - 48\alpha_3^2\alpha_2^2 - 216\alpha_1\alpha_3^3)\bar{a}_{15} + \\ & (-48\Gamma_3 + 128\alpha_1^2\alpha_2^2 + 224\Gamma_1 - 140\alpha_1\alpha_3^3 - 20\alpha_3^4)\bar{a}_{16} + \\ & (592\Gamma_3 + 128\Gamma_2 + 248\alpha_3^3\alpha_2 + 572\alpha_1\alpha_3^3 + 176\alpha_3^4 + 96\alpha_3^2\alpha_2^2)\bar{a}_{17} + \\ & (-572\alpha_1\alpha_3^3 - 176\alpha_3^4 - 96\alpha_3^2\alpha_2^2 - 592\Gamma_3 - 248\alpha_3^3\alpha_2 - 128\Gamma_2)\bar{a}_{18} + \\ & (-128\alpha_1^2\alpha_2^2 + 128\Gamma_2 + 712\alpha_1\alpha_3^3 + 96\alpha_3^2\alpha_2^2 + 196\alpha_3^4 + 248\alpha_3^3\alpha_2 + 640\Gamma_3 - 224\Gamma_1)\bar{a}_{20} + \\ & (-48\alpha_3^2\alpha_2^2 - 64\Gamma_2 - 124\alpha_3^3\alpha_2 - 320\Gamma_3 + 64\alpha_1^2\alpha_2^2 + 112\Gamma_1 - 356\alpha_1\alpha_3^3 - 98\alpha_3^4)\bar{a}_{21} + \\ & (48\Gamma_3 - 224\Gamma_1 + 20\alpha_3^4 - 128\alpha_1^2\alpha_2^2 + 140\alpha_1\alpha_3^3)\bar{a}_{22}, \end{aligned}$$

(C.8)

$$9\bar{a}_{13}\Gamma_4\Gamma_5 =$$

$$\begin{aligned} & (40\alpha_3^3\alpha_2 - 660\alpha_1\alpha_3^3 - 704\alpha_1^2\alpha_2^2 - 1232\Gamma_1 - 384\alpha_1\alpha_2^3 - 1376\Gamma_2 - 1744\Gamma_3)\bar{a}_7 + \\ & (1232\Gamma_1 + 660\alpha_1\alpha_3^3 + 1376\Gamma_2 - 40\alpha_3^3\alpha_2 + 384\alpha_1\alpha_2^3 + 1744\Gamma_3 + 704\alpha_1^2\alpha_2^2)\bar{a}_8 + \\ & (240\alpha_3^2\alpha_2^2 + 660\alpha_1\alpha_3^3 + 1232\Gamma_1 + 1216\Gamma_3 + 330\alpha_3^4 + 620\alpha_3^3\alpha_2 + 704\alpha_1^2\alpha_2^2 + 320\Gamma_2)\bar{a}_9 + \\ & (-240\alpha_3^2\alpha_2^2 - 320\Gamma_2 - 1232\Gamma_1 - 660\alpha_1\alpha_3^3 - 704\alpha_1^2\alpha_2^2 - 330\alpha_3^4 - 620\alpha_3^3\alpha_2 - 1216\Gamma_3)\bar{a}_{10} + \\ & (-572\alpha_1\alpha_3^3 - 176\alpha_3^4 - 96\alpha_3^2\alpha_2^2 - 592\Gamma_3 - 248\alpha_3^3\alpha_2 - 128\Gamma_2)\bar{a}_{15} + \\ & (592\Gamma_3 + 128\Gamma_2 + 248\alpha_3^3\alpha_2 + 572\alpha_1\alpha_3^3 + 176\alpha_3^4 + 96\alpha_3^2\alpha_2^2)\bar{a}_{16} + \\ & (-48\Gamma_3 + 128\alpha_1^2\alpha_2^2 + 224\Gamma_1 - 140\alpha_1\alpha_3^3 - 20\alpha_3^4)\bar{a}_{17} + \\ & (-272\Gamma_3 - 112\Gamma_1 - 78\alpha_3^4 - 64\alpha_1^2\alpha_2^2 - 64\Gamma_2 - 124\alpha_3^3\alpha_2 - 48\alpha_3^2\alpha_2^2 - 216\alpha_1\alpha_3^3)\bar{a}_{18} + \\ & (-48\Gamma_3 + 128\alpha_1^2\alpha_2^2 + 224\Gamma_1 - 140\alpha_1\alpha_3^3 - 20\alpha_3^4)\bar{a}_{19} + \\ & (48\Gamma_3 - 224\Gamma_1 + 20\alpha_3^4 - 128\alpha_1^2\alpha_2^2 + 140\alpha_1\alpha_3^3)\bar{a}_{20} + \\ & (-48\alpha_3^2\alpha_2^2 - 64\Gamma_2 - 124\alpha_3^3\alpha_2 - 320\Gamma_3 + 64\alpha_1^2\alpha_2^2 + 112\Gamma_1 - 356\alpha_1\alpha_3^3 - 98\alpha_3^4)\bar{a}_{21} + \\ & (-128\alpha_1^2\alpha_2^2 + 128\Gamma_2 + 712\alpha_1\alpha_3^3 + 96\alpha_3^2\alpha_2^2 + 196\alpha_3^4 + 248\alpha_3^3\alpha_2 + 640\Gamma_3 - 224\Gamma_1)\bar{a}_{22}. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \\ \bar{a}_5 \\ \bar{a}_6 \\ \bar{a}_7 \\ \bar{a}_8 \\ \bar{a}_9 \\ \bar{a}_{10} \\ \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{15} \\ \bar{a}_{16} \\ \bar{a}_{17} \\ \bar{a}_{18} \\ \bar{a}_{19} \\ \bar{a}_{20} \\ \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{22} \end{bmatrix} = \frac{\psi}{4} \begin{bmatrix} \alpha_2^2 & -32\alpha_2^2 & 28\alpha_2^2 & 160\alpha_2^2 & -224\alpha_2^2 & 70\alpha_2^2 \\ \alpha_2^2 & -4\alpha_2^2 & -28\alpha_2^2 & 6\alpha_2^2 & 84\alpha_2^2 & 70\alpha_2^2 \\ 6\alpha_2^2 & -108\alpha_2^2 & 0 & 358\alpha_2^2 & 700\alpha_2^2 & -700\alpha_2^2 \\ 4\alpha_2^2 & -100\alpha_2^2 & 56\alpha_2^2 & 416\alpha_2^2 & -28\alpha_2^2 & -280\alpha_2^2 \\ 4\alpha_2^2 & -44\alpha_2^2 & -56\alpha_2^2 & 108\alpha_2^2 & 588\alpha_2^2 & -280\alpha_2^2 \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1\alpha_3+4\alpha_1\alpha_2-\alpha_3^2 & 2\alpha_3^2-8\alpha_1\alpha_2-2\alpha_1\alpha_3 & 2\alpha_3^2+4\alpha_2^2-4\alpha_1\alpha_2+4\alpha_2\alpha_3 & -32\alpha_2^2+12\alpha_1\alpha_2-20\alpha_2\alpha_3-5\alpha_3^2 & 2\alpha_3^2+32\alpha_2^2+16\alpha_2\alpha_3-4\alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1^2 & -4\alpha_1\alpha_2+\alpha_3^2 & 8\alpha_1\alpha_2-2\alpha_3^2+2\alpha_1\alpha_3 & -\alpha_3^2+4\alpha_2^2+4\alpha_1\alpha_2 & -4\alpha_1\alpha_2-12\alpha_2\alpha_3-32\alpha_2^2+\alpha_3^2 & 2\alpha_3^2+32\alpha_2^2+16\alpha_2\alpha_3-4\alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1^2+\alpha_3^2+2\alpha_1\alpha_3 & -3\alpha_3^2+4\alpha_1\alpha_2-2\alpha_1\alpha_3+4\alpha_2\alpha_3 & 0 & 2\alpha_3^2-8\alpha_2\alpha_3-4\alpha_1\alpha_2+4\alpha_2^2 & -12\alpha_2\alpha_3-4\alpha_1\alpha_2+16\alpha_2^2+\alpha_3^2 & 12\alpha_2\alpha_3-16\alpha_2^2-\alpha_3^2+4\alpha_1\alpha_2 \\ 2\alpha_1^2 & 2\alpha_1\alpha_3 & 0 & -8\alpha_2^2-4\alpha_2\alpha_3 & 32\alpha_2\alpha_3+4\alpha_3^2+8\alpha_1\alpha_2+64\alpha_2^2 & -4\alpha_3^2-8\alpha_1\alpha_2-64\alpha_2^2-32\alpha_2\alpha_3 \\ 2\alpha_1\alpha_3+2\alpha_1^2 & 8\alpha_1\alpha_2+4\alpha_3^2+4\alpha_2\alpha_3 & -2\alpha_1\alpha_3-8\alpha_1\alpha_2-4\alpha_3^2-8\alpha_2\alpha_3 & -4\alpha_3^2+8\alpha_2^2-4\alpha_2\alpha_3-8\alpha_1\alpha_2 & -16\alpha_2^2+32\alpha_2\alpha_3+8\alpha_1\alpha_2+4\alpha_3^2 & -20\alpha_2\alpha_3 \\ 2\alpha_1\alpha_3+2\alpha_1^2 & -4\alpha_2\alpha_3-2\alpha_1\alpha_3 & 8\alpha_2\alpha_3+4\alpha_3^2+8\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_3 & -8\alpha_2^2+8\alpha_2\alpha_3 & 16\alpha_2^2-8\alpha_1\alpha_2-4\alpha_3^2+8\alpha_2\alpha_3 & -20\alpha_2\alpha_3 \\ 0 & -\frac{8}{3}\alpha_2\alpha_3 & -\frac{4}{3}\alpha_3^2 & 8\alpha_2\alpha_3 & -32\alpha_2^2+\frac{8}{3}\alpha_3^2-\frac{16}{3}\alpha_2\alpha_3 & 32\alpha_2^2-\frac{4}{3}\alpha_3^2+\frac{8}{3}\alpha_2\alpha_3 \\ 0 & -\frac{4}{3}\alpha_3^2-\frac{8}{3}\alpha_2\alpha_3 & \frac{4}{3}\alpha_3^2 & \frac{4}{3}\alpha_3^2+\frac{16}{3}\alpha_2\alpha_3 & -32\alpha_2^2 & 32\alpha_2^2-\frac{4}{3}\alpha_3^2+\frac{8}{3}\alpha_2\alpha_3 \\ 2\alpha_1\alpha_2 & 12\alpha_2^2+10\alpha_2\alpha_3-16\alpha_1\alpha_2 & -24\alpha_2^2-10\alpha_2\alpha_3+12\alpha_1\alpha_2 & 16\alpha_1\alpha_2-40\alpha_2\alpha_3-76\alpha_2^2 & -16\alpha_1\alpha_2+332\alpha_2^2+60\alpha_2\alpha_3 & -220\alpha_2^2-20\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2 \\ 4\alpha_1\alpha_2 & 24\alpha_2^2+20\alpha_2\alpha_3-20\alpha_1\alpha_2 & -20\alpha_2\alpha_3-48\alpha_2^2 & -112\alpha_2^2-60\alpha_2\alpha_3+16\alpha_1\alpha_2 & 20\alpha_2\alpha_3+12\alpha_1\alpha_2+344\alpha_2^2 & 40\alpha_2\alpha_3-120\alpha_2^2-12\alpha_1\alpha_2 \\ 2\alpha_1\alpha_2 & 12\alpha_2^2+10\alpha_2\alpha_3-4\alpha_1\alpha_2 & -24\alpha_2^2-10\alpha_2\alpha_3-12\alpha_1\alpha_2 & 2\alpha_1\alpha_2-20\alpha_2\alpha_3-36\alpha_2^2 & 12\alpha_1\alpha_2+12\alpha_2^2-40\alpha_2\alpha_3 & 100\alpha_2^2+60\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2 \\ 2\alpha_1\alpha_2 & -12\alpha_2^2-16\alpha_1\alpha_2 & 24\alpha_2^2+10\alpha_2\alpha_3+12\alpha_1\alpha_2 & 16\alpha_1\alpha_2+76\alpha_2^2 & -80\alpha_2\alpha_3-16\alpha_1\alpha_2-212\alpha_2^2 & 100\alpha_2^2+60\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2 \\ 4\alpha_1\alpha_2 & -24\alpha_2^2-20\alpha_1\alpha_2 & 48\alpha_2^2+20\alpha_2\alpha_3 & 112\alpha_2^2+16\alpha_1\alpha_2 & -104\alpha_2^2-100\alpha_2\alpha_3+12\alpha_1\alpha_2 & 40\alpha_2\alpha_3-120\alpha_2^2-12\alpha_1\alpha_2 \\ 2\alpha_1\alpha_2 & -12\alpha_2^2-4\alpha_1\alpha_2 & 24\alpha_2^2+10\alpha_2\alpha_3-12\alpha_1\alpha_2 & 2\alpha_1\alpha_2+36\alpha_2^2 & -20\alpha_2\alpha_3+12\alpha_1\alpha_2+108\alpha_2^2 & -220\alpha_2^2-20\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2 \\ 2\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2 & -26\alpha_2\alpha_3+12\alpha_2^2-16\alpha_1\alpha_2 & 12\alpha_1\alpha_2+20\alpha_2\alpha_3 & 56\alpha_2\alpha_3-76\alpha_2^2+16\alpha_1\alpha_2 & -16\alpha_1\alpha_2-100\alpha_2^2-60\alpha_2\alpha_3 & 140\alpha_2^2+10\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2 \\ 4\alpha_2\alpha_3+4\alpha_1\alpha_2 & -20\alpha_1\alpha_2-32\alpha_2\alpha_3+24\alpha_2^2 & 0 & 52\alpha_2\alpha_3+16\alpha_1\alpha_2-112\alpha_2^2 & 60\alpha_2\alpha_3+12\alpha_1\alpha_2-280\alpha_2^2 & -60\alpha_2\alpha_3-12\alpha_1\alpha_2+280\alpha_2^2 \\ 2\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2 & -6\alpha_2\alpha_3+12\alpha_2^2-4\alpha_1\alpha_2 & -12\alpha_1\alpha_2-20\alpha_2\alpha_3 & 6\alpha_2\alpha_3-36\alpha_2^2+2\alpha_1\alpha_2 & 12\alpha_1\alpha_2-180\alpha_2^2+40\alpha_2\alpha_3 & 140\alpha_2^2+10\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2 \end{bmatrix} \dots$$

	$-256\alpha_2^2$	$448\alpha_2^2$	$-224\alpha_2^2$	$28\alpha_2^2$	$128\alpha_2^2$	$-256\alpha_2^2$	$160\alpha_2^2$	$-32\alpha_2^2$	$\alpha_2^2$	$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ J_{30} \\ J_{32} \\ J_{50} \\ J_{52} \\ J_{54} \\ J_{70} \\ J_{72} \\ J_{74} \\ J_{76} \\ J_{90} \\ J_{92} \\ J_{94} \\ J_{96} \\ J_{98} \end{array} \right]$
	$-4\alpha_2^2$	$-84\alpha_2^2$	$-140\alpha_2^2$	$-28\alpha_2^2$	$\alpha_2^2$	$28\alpha_2^2$	$70\alpha_2^2$	$28\alpha_2^2$	$\alpha_2^2$	
	$-416\alpha_2^2$	$-1820\alpha_2^2$	$1820\alpha_2^2$	0	$160\alpha_2^2$	$1120\alpha_2^2$	$-1050\alpha_2^2$	$-140\alpha_2^2$	$70\alpha_2^2$	
	$-576\alpha_2^2$	$-448\alpha_2^2$	$1316\alpha_2^2$	$-392\alpha_2^2$	$256\alpha_2^2$	$448\alpha_2^2$	$-1120\alpha_2^2$	$476\alpha_2^2$	$-28\alpha_2^2$	
	$-100\alpha_2^2$	$-1008\alpha_2^2$	$140\alpha_2^2$	$392\alpha_2^2$	$32\alpha_2^2$	$476\alpha_2^2$	$140\alpha_2^2$	$-364\alpha_2^2$	$-28\alpha_2^2$	
	$-8\alpha_2^2 - 4\alpha_2\alpha_3$	$24\alpha_2\alpha_3 + 88\alpha_2^2$	$-24\alpha_2\alpha_3 - 136\alpha_2^2$	$48\alpha_2^2 + 4\alpha_2\alpha_3$	$4\alpha_2^2$	$-56\alpha_2^2$	$108\alpha_2^2$	$-56\alpha_2^2$	$4\alpha_2^2$	
	$-8\alpha_2^2$	$12\alpha_2\alpha_3 + 40\alpha_2^2$	$8\alpha_2^2 - 12\alpha_2\alpha_3$	$-4\alpha_2\alpha_3 - 48\alpha_2^2$	$4\alpha_2^2$	$-8\alpha_2^2$	$-36\alpha_2^2$	$40\alpha_2^2$	$4\alpha_2^2$	
	$-8\alpha_2^2 + 4\alpha_2\alpha_3$	$12\alpha_2\alpha_3 - 56\alpha_2^2$	$-12\alpha_2\alpha_3 + 56\alpha_2^2$	0	$4\alpha_2^2$	$40\alpha_2^2$	$-36\alpha_2^2$	$-8\alpha_2^2$	$4\alpha_2^2$	
	$4\alpha_2\alpha_3 + 16\alpha_2^2$	$-28\alpha_2\alpha_3 - 128\alpha_2^2$	$128\alpha_2^2 + 28\alpha_2\alpha_3$	0	$-8\alpha_2^2$	$64\alpha_2^2$	$-56\alpha_2^2$	$-16\alpha_2^2$	$8\alpha_2^2$	
	$-16\alpha_2^2$	$-28\alpha_2\alpha_3 + 32\alpha_2^2$	$28\alpha_2\alpha_3 + 48\alpha_2^2$	$-4\alpha_2\alpha_3 - 48\alpha_2^2$	$8\alpha_2^2$	$-16\alpha_2^2$	$-56\alpha_2^2$	$64\alpha_2^2$	$-8\alpha_2^2$	
		$16\alpha_2^2 - 4\alpha_2\alpha_3$	$16\alpha_2^2 - 16\alpha_2\alpha_3$	$16\alpha_2\alpha_3 - 96\alpha_2^2$	$48\alpha_2^2 + 4\alpha_2\alpha_3$	$-8\alpha_2^2$	$-32\alpha_2^2 - 88\alpha_2^2$	$-32\alpha_2^2$	$-8\alpha_2^2$	
...	$-\frac{16}{3}\alpha_2\alpha_3$	$8\alpha_2\alpha_3 + 96\alpha_2^2$	$-128\alpha_2^2 - 8\alpha_2\alpha_3$	$\frac{8}{3}\alpha_2\alpha_3 + 32\alpha_2^2$	0	$-64\alpha_2^2$	$96\alpha_2^2$	$-32\alpha_2^2$	0	
	$-\frac{8}{3}\alpha_2\alpha_3$	$64\alpha_2^2$	$-32\alpha_2^2$	$-32\alpha_2^2 - \frac{8}{3}\alpha_2\alpha_3$	0	$-32\alpha_2^2$	0	$32\alpha_2^2$	0	
	$32\alpha_2\alpha_3 + 128\alpha_2^2$	$-808\alpha_2^2 - 56\alpha_2\alpha_3$	$26\alpha_2\alpha_3 + 836\alpha_2^2$	$-2\alpha_2\alpha_3 - 192\alpha_2^2$	$-64\alpha_2^2$	$512\alpha_2^2$	$-652\alpha_2^2$	$228\alpha_2^2$	$-12\alpha_2^2$	
	$40\alpha_2\alpha_3 + 152\alpha_2^2$	$-544\alpha_2^2 + 20\alpha_2\alpha_3$	$-80\alpha_2\alpha_3$	$240\alpha_2^2 + 20\alpha_2\alpha_3$	$-64\alpha_2^2$	$248\alpha_2^2$	$160\alpha_2^2$	$-320\alpha_2^2$	$40\alpha_2^2$	
	$10\alpha_2\alpha_3 + 36\alpha_2^2$	$48\alpha_2^2 + 50\alpha_2\alpha_3$	$-50\alpha_2\alpha_3 - 260\alpha_2^2$	$-10\alpha_2\alpha_3 + 48\alpha_2^2$	$-12\alpha_2^2$	$-36\alpha_2^2$	$160\alpha_2^2$	$-36\alpha_2^2$	$-12\alpha_2^2$	
	$-128\alpha_2^2$	$80\alpha_2\alpha_3 + 328\alpha_2^2$	$-116\alpha_2^2 - 80\alpha_2\alpha_3$	$-48\alpha_2^2 + 10\alpha_2\alpha_3$	$64\alpha_2^2$	$-128\alpha_2^2$	$-20\alpha_2^2$	$84\alpha_2^2$	$-12\alpha_2^2$	
	$-152\alpha_2^2$	$80\alpha_2\alpha_3 - 176\alpha_2^2$	$-20\alpha_2\alpha_3 + 720\alpha_2^2$	$-240\alpha_2^2 - 20\alpha_2\alpha_3$	$64\alpha_2^2$	$232\alpha_2^2$	$-560\alpha_2^2$	$160\alpha_2^2$	$40\alpha_2^2$	
	$-36\alpha_2^2$	$10\alpha_2\alpha_3 - 288\alpha_2^2$	$260\alpha_2^2 + 20\alpha_2\alpha_3$	$192\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3$	$12\alpha_2^2$	$156\alpha_2^2$	$-40\alpha_2^2$	$-180\alpha_2^2$	$-12\alpha_2^2$	
	$-32\alpha_2\alpha_3 + 128\alpha_2^2$	$344\alpha_2^2 + 40\alpha_2\alpha_3$	$-604\alpha_2^2 - 10\alpha_2\alpha_3$	$168\alpha_2^2$	$-64\alpha_2^2$	$-256\alpha_2^2$	$500\alpha_2^2$	$-204\alpha_2^2$	$12\alpha_2^2$	
	$152\alpha_2^2 - 24\alpha_2\alpha_3$	$-60\alpha_2\alpha_3 + 800\alpha_2^2$	$-800\alpha_2^2 + 60\alpha_2\alpha_3$	0	$-64\alpha_2^2$	$-520\alpha_2^2$	$480\alpha_2^2$	$80\alpha_2^2$	$-40\alpha_2^2$	
	$-2\alpha_2\alpha_3 + 36\alpha_2^2$	$360\alpha_2^2 - 20\alpha_2\alpha_3$	$-100\alpha_2^2 - 10\alpha_2\alpha_3$	$-168\alpha_2^2$	$-12\alpha_2^2$	$-180\alpha_2^2$	$-40\alpha_2^2$	$156\alpha_2^2$	$12\alpha_2^2$	

**Tab. C.1 :** Expression des  $\bar{a}_r$  en fonction de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  et des intégrales  $J_{pq}$  définies par (4.9). Ces calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel Maple.



## Annexe D

# Stabilité en cisaillement simple des fabriques à un seul maximum

Dans cette annexe, nous étudions analytiquement la stabilité en cisaillement simple des fabriques à un seul maximum d'orientation contenu dans le plan de cisaillement.

Considérons un polycristal dont tous les axes- $c$  sont contenus dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  et ont la même orientation  $(\theta = \pi/2, \varphi)$ . Si tous les axes- $c$  des grains sont confondus, le comportement du polycristal est équivalent à celui d'un grain unique. Dans la suite, le comportement du grain, et donc du polycristal, est supposé linéaire et il est donné par la loi (2.7). Nous nous proposons d'étudier la stabilité de cette fabrique si le grain est soumis à un état de déformation de cisaillement simple défini, dans le repère de référence  $\{\mathbf{R}\}$ , par :

$$(D.1) \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{D}_{12} & 0 \\ \bar{D}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{D}_{12} & 0 \\ -\bar{D}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La position d'équilibre de ce grain est donnée par l'étude des variations des vitesses de rotation (3.43). Il vient immédiatement  $\dot{\theta} = 0$  puisque  $\theta = \pi/2$ , et par conséquent, l'axe- $c$  du grain reste contenu dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  pour une déformation en cisaillement simple.

L'étude des variations de  $\dot{\varphi}$  est réalisée en remplaçant les contraintes déviatoires  $\bar{S}_{11}$ ,  $\bar{S}_{22}$  et  $\bar{S}_{12}$  dans (3.43) par leurs expressions en fonction de la vitesse de déformation imposée  $\bar{D}_{12}$  et de  $\varphi$ , comme suit :

- En utilisant la matrice de rotation reliant  ${}^g\bar{\mathbf{D}}$  à  $\bar{\mathbf{D}}$ , donnée par (2.1) où  $\theta = \pi/2$ , et l'expression (D.1) de  $\bar{\mathbf{D}}$ , il vient :

$$(D.2) \quad \left| \begin{array}{l} {}^g\bar{D}_{11} = 0 \\ {}^g\bar{D}_{22} = -\bar{D}_{12} \sin 2\varphi \\ {}^g\bar{D}_{33} = \bar{D}_{12} \sin 2\varphi \\ 2{}^g\bar{D}_{23} = \bar{D}_{12} \cos 2\varphi \\ 2{}^g\bar{D}_{31} = 0 \\ 2{}^g\bar{D}_{12} = 0 \end{array} \right. .$$

- En introduisant la loi de comportement (2.7), les expressions précédentes sont réécrites en fonction des contraintes déviatoires  ${}^gS_{ij}$ , exprimées dans le repère du grain.

Avec la première équation de (D.2) nous obtenons :

$$(D.3) \quad {}^g\bar{S}_{11} = 2 \frac{\gamma - 1}{2\gamma + 1} {}^g\bar{S}_{22},$$

puis ensuite, il vient :

$$(D.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^g\bar{S}_{11} = -\bar{D}_{12} \frac{2}{\beta\psi} \frac{2\gamma - 2}{3} \sin 2\varphi \\ {}^g\bar{S}_{22} = -\bar{D}_{12} \frac{2}{\beta\psi} \frac{2\gamma + 1}{3} \sin 2\varphi \\ {}^g\bar{S}_{33} = \bar{D}_{12} \frac{2}{\beta\psi} \frac{4\gamma - 1}{3} \sin 2\varphi \\ {}^g\bar{S}_{23} = \bar{D}_{12} \frac{2}{\psi} \cos 2\varphi \\ {}^g\bar{S}_{31} = 0 \\ {}^g\bar{S}_{12} = 0 \end{array} \right. .$$

- Puis par changement de base, les relations précédentes conduisent aux relations donnant les contraintes déviatoires, exprimées dans le repère de référence, en fonction de la vitesse de déformation appliquée  $\bar{D}_{12}$ , soit :

$$(D.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{11} = -\frac{2}{\psi} \bar{D}_{12} \left( \frac{1 + 2\gamma \sin^2 \varphi - 4\gamma \cos^2 \varphi}{3\beta} + \cos 2\varphi \right) \sin 2\varphi \\ \bar{S}_{22} = -\frac{2}{\psi} \bar{D}_{12} \left( \frac{1 + 2\gamma \cos^2 \varphi - 4\gamma \sin^2 \varphi}{3\beta} - \cos 2\varphi \right) \sin 2\varphi \\ \bar{S}_{33} = -\frac{4}{\psi} \bar{D}_{12} \frac{\gamma - 1}{3\beta} \sin 2\varphi \\ \bar{S}_{23} = 0 \\ \bar{S}_{31} = 0 \\ \bar{S}_{12} = \frac{2}{\psi} \bar{D}_{12} \left( \frac{\gamma}{\beta} \sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi \right) \end{array} \right. .$$

- Enfin, en reportant ces expressions dans la deuxième équation de (3.43) définissant  $\dot{\varphi}$  et en notant que  $\bar{W}_{12} = \bar{D}_{12}$ , nous obtenons :

$$(D.6) \quad \dot{\varphi} = -\bar{D}_{12}(1 + \cos 2\varphi).$$

L'étude du signe de  $\dot{\varphi}$  montre que, quelque soit le comportement du grain (linéaire), la seule position d'équilibre est en  $\varphi = \pm\pi/2$ , mais que cette position d'équilibre n'est stable qu'à gauche puisque  $\dot{\varphi}$  ne change pas de signe. Une perturbation positive entraîne la rotation du grain jusqu'à la position d'équilibre opposée, mais qui correspond à la même position du grain (rotation de  $\pi$ ).

Pour un grain se déformant uniquement par glissement dans les plans de base ( $\beta = 0$ ), seuls les grains orientés à  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi/2$  (à  $\pi$  près) peuvent se déformer. En effet, si  $\beta = 0$  et  $\varphi \neq k\pi/2$ , les relations (D.5) conduisent à  $\bar{D}_{12} = 0$  et ceci quelque soit l'état de contrainte.



## Annexe E

# ODF analytique pour un cisaillement simple dans l'hypothèse de Taylor

Dans cette annexe, nous présentons les calculs permettant d'obtenir une expression analytique de l'ODF pour un état de déformation en cisaillement simple et en faisant l'hypothèse de **déformations** homogènes dans le polycristal (modèle de Taylor). Il ne semble pas possible d'obtenir une formulation similaire avec le modèle à contraintes homogènes. Néanmoins, ce résultat est intéressant puisqu'il prouve qu'il est possible d'aboutir à une fabrique à un seul maximum, orienté perpendiculairement à la direction du cisaillement.

D'après les explications développées au paragraphe **3.4.5**, les équations (3.9) donnant  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  pour le modèle à contraintes homogènes restent valables pour le modèle de Taylor en remplaçant  $\psi \bar{S}_{ij}/2$  par  $\bar{D}_{ij}$ . Par conséquent, pour un état de déformation de cisaillement simple  $\bar{D}_{12} = \bar{W}_{12}$ , défini au paragraphe **5.4.1**, les équations (3.9) se réécrivent, sous l'hypothèse du modèle de Taylor, comme :

$$(E.1) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = -\sin \theta \cos \theta \sin 2\varphi \bar{D}_{12} \\ \dot{\varphi} = -(1 + \cos 2\varphi) \bar{D}_{12} \end{cases} .$$

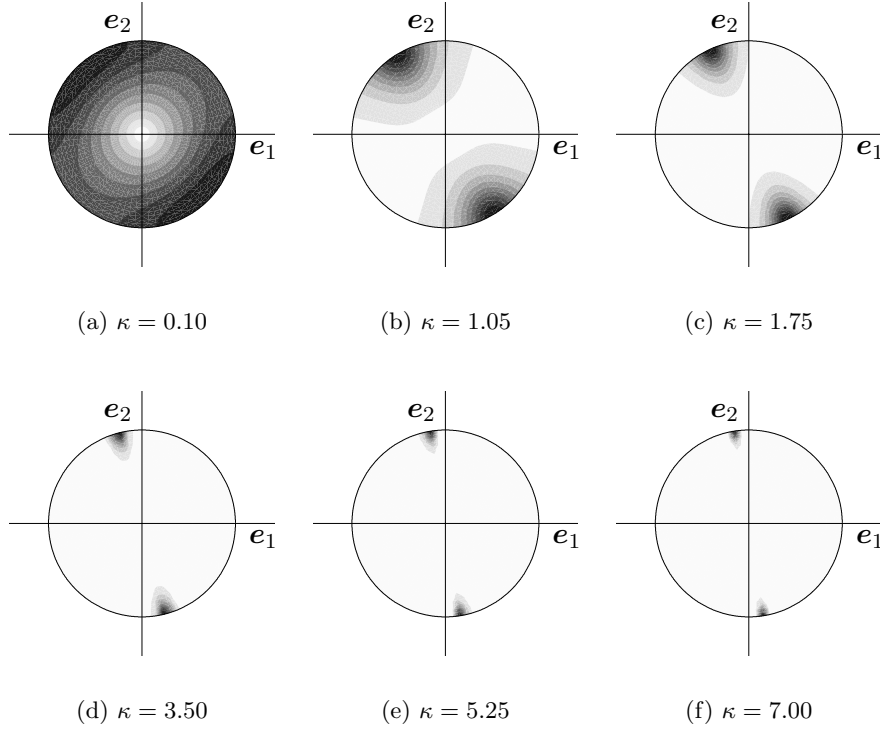
L'intégration de ce système d'équations, en posant comme conditions initiales  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\varphi(0) = \varphi_0$  à  $t = 0$ , donne :

$$(E.2) \quad \begin{cases} \tan \varphi = \tan \varphi_0 - \kappa \\ \tan \theta = \tan \theta_0 \left( \frac{1 + (\tan \varphi_0 - \kappa)^2}{1 + \tan^2 \varphi_0} \right)^{1/2} , \end{cases}$$

où  $\kappa = 2\bar{D}_{12}t$  mesure la déformation en cisaillement simple de 0 à  $t$ .

L'équation de la conservation du nombre de grain (3.10) écrite sous la forme (3.25) devient :

$$(E.3) \quad \frac{d f \sin \theta}{d t} = -2f \sin \theta \left( \dot{\theta} \cot 2\theta - \dot{\varphi} \frac{\sin 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} \right) ,$$



**Fig. E.1 :** Représentation en projection de Schmidt de l'ODF analytique de cisaillement simple E.4, obtenue avec le modèle de Taylor, pour différentes valeurs de la déformation  $\kappa$ .

qui s'intègre pour donner :

$$(E.4) \quad f(\theta, \varphi, t) \sin \theta = \frac{\sin \theta_0 \sin 2\theta_0 (1 + \cos 2\varphi_0)}{\sin 2\theta (1 + \cos 2\varphi)}.$$

En inversant les relations (E.2), puis en remplaçant  $\theta_0$  et  $\varphi_0$  dans l'équation précédente par leurs expressions en fonction de  $\theta$ ,  $\varphi$  et  $\kappa$ , il vient :

$$(E.5) \quad f(\theta, \varphi, t) = \frac{1}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + \kappa \cos \varphi)^2))^{3/2}}.$$

Il est intéressant de remarquer que l'ODF (E.5) ne présente pas de symétrie d'orthotropie, mais que la forme de la fabrique reste très proche de celle d'une fabrique orthotrope (*cf.* Figure E.1).

## Annexe F

# Inversion de la loi de comportement dans le cas linéaire

L'homogénéisation à partir de l'hypothèse de contraintes homogènes conduit à une loi de comportement donnant les vitesses de déformation en fonction des contraintes déviatoires. Dans le cadre d'un calcul d'écoulement de calotte polaire par la méthode des éléments finis formulée en "vitesse-pression", le traitement de la vitesse comme inconnue nodale nécessite de déterminer la loi inverse donnant les contraintes déviatoires en fonction des vitesses de déformation. Les résultats analytiques obtenus au **Chapitre 4** vont nous permettre d'effectuer cette inversion de manière relativement simple, alors que sans expression analytique pour la loi de comportement macroscopique, seule une inversion numérique serait envisageable.

Le problème à résoudre est donc : à partir de l'expression (4.6), déterminer la loi inverse correspondante qui exprime les contraintes déviatoires  $\bar{\mathbf{S}}$  en fonction des vitesses de déformation  $\bar{\mathbf{D}}$ .

En remarquant que

$$2\bar{\mathbf{S}} = \sum_{r=1}^3 (\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_r + \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}})^D,$$

la loi de comportement (4.6) est réécrite en introduisant le générateur  $\bar{\mathbf{S}}$  de façon à éliminer  $(\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_3 + \bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}})^D$ . Ceci permet d'exprimer  $\bar{\mathbf{S}}$  en fonction des autres termes :

$$\begin{aligned} (F.1) \quad 2\bar{\alpha}_6 \bar{\mathbf{S}} = & \bar{\mathbf{D}} - \sum_{r=1}^3 \bar{\alpha}_r \bar{\mathbf{I}}_r \bar{\mathbf{M}}_r^D \\ & - (\bar{\alpha}_4 - \bar{\alpha}_6) (\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}})^D \\ & - (\bar{\alpha}_5 - \bar{\alpha}_6) (\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_2 + \bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}})^D, \end{aligned}$$

Les générateurs vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 (F.2) \quad & \bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{M}}_1 = \bar{\mathbf{M}}_1, \quad \bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{M}}_1^D = \frac{2}{3} \bar{\mathbf{M}}_1, \\
 & \bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{M}}_1^D = -\frac{1}{3} \bar{\mathbf{M}}_2, \\
 & \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_r = \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{S}}) \bar{\mathbf{M}}_r,
 \end{aligned}$$

ce qui permet d'exprimer les invariants  $\text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{D}})$  à partir de l'expression (4.6) sous la forme :

$$(F.3) \quad \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{D}}) = (\bar{\alpha}_r + 2\bar{\alpha}_{r+3}) \bar{I}_r - \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 (\bar{\alpha}_s + 2\bar{\alpha}_{s+3}) \bar{I}_s, \quad r = 1, 2, 3,$$

ainsi que les générateurs  $(\bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{D}})^D$  et  $(\bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{M}}_2 + \bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{D}})^D$  :

$$\begin{aligned}
 (F.4) \quad & (\bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{M}}_1)^D = \\
 & \frac{2}{3} ((2\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_4) \bar{I}_1 - (\bar{\alpha}_2 + 2\bar{\alpha}_5) \bar{I}_2 - (\bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_6) \bar{I}_3) \bar{\mathbf{M}}_1^D \\
 & + \bar{\alpha}_4 (\bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_1)^D + \bar{\alpha}_5 (\bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_2) \\
 & + \bar{\alpha}_6 (\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_3), \\
 & (\bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{M}}_2)^D = \\
 & \frac{2}{3} (-(\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_4) \bar{I}_1 + (2\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_5) \bar{I}_2 - (\bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_6) \bar{I}_3) \bar{\mathbf{M}}_2^D \\
 & + \bar{\alpha}_4 (\bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_2 + \bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_1) + \bar{\alpha}_5 (\bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_2)^D \\
 & + \bar{\alpha}_6 (\bar{\mathbf{M}}_3 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_2 + \bar{\mathbf{M}}_2 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_3).
 \end{aligned}$$

En inversant les trois relations (F.3) et en remarquant que

$$\begin{aligned}
 (F.5) \quad & \bar{\mathbf{M}}_p \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_q + \bar{\mathbf{M}}_q \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_p = \\
 & -\bar{\mathbf{S}} + (\bar{\mathbf{M}}_p \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_p) + (\bar{\mathbf{M}}_q \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{M}}_q) \\
 & - \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_p \bar{\mathbf{S}}) (\bar{\mathbf{M}}_p + \bar{\mathbf{M}}_r) - \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_q \bar{\mathbf{S}}) (\bar{\mathbf{M}}_q + \bar{\mathbf{M}}_r),
 \end{aligned}$$

où  $(p, q, r) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)$ , les deux générateurs et les trois invariants du tenseur des contraintes sont remplacés par leurs expressions en fonction de celles des vitesses de déformation. Puis, en exprimant le générateur  $\bar{\mathbf{D}}$  comme la demi-somme des générateurs  $(\bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{M}}_r + \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{D}})^D$ , nous obtenons la loi de comportement inverse suivante pour le polycristal de glace orthotrope linéaire :

$$(F.6) \quad \bar{\mathbf{S}} = \sum_{r=1}^3 \left( \bar{\eta}_r \text{tr}(\bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{D}}) \bar{\mathbf{M}}_r^D + \bar{\eta}_{r+3} (\bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{M}}_r + \bar{\mathbf{M}}_r \bar{\mathbf{D}})^D \right).$$

Notons que la forme de la loi (F.6) aurait pu être postulée, *a priori*, puisqu'elle est formellement identique à la loi reliant les vitesses de déformation aux contraintes déviatoires (4.6). Ce qui précède a donc vocation de démonstration.

Les relations liant les viscosités  $\bar{\eta}_r$  aux fluidités  $\bar{\alpha}_r$  sont données par<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_1 \chi_1 \chi_2 = & (2\bar{\alpha}_2 + 2\bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_5 + 2\bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_4^3 \\
 & + ((\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_3 - 2\bar{\alpha}_5) \bar{\alpha}_5 - 2\bar{\alpha}_6^2 + (\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2) \bar{\alpha}_6 + \chi_3) \bar{\alpha}_4^2 \\
 & - ((3\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_5^2 + (2\bar{\alpha}_6^2 + 6\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6 + \chi_3) \bar{\alpha}_5) \bar{\alpha}_4 \\
 & - ((3\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2) \bar{\alpha}_6 + \chi_3) \bar{\alpha}_6 \bar{\alpha}_4 \\
 & - (2\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_3) \bar{\alpha}_5^3 + (4\bar{\alpha}_6^2 - 5\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6 - \chi_3) \bar{\alpha}_5^2 \\
 & - (5\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6^2 + \chi_3 \bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_5 - 2(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) \bar{\alpha}_6^3 - \chi_3 \bar{\alpha}_6^2
 \end{aligned}
 \tag{F.7}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_2 \chi_1 \chi_2 = & -2(\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3) \bar{\alpha}_4^3 \\
 & - (2\bar{\alpha}_5^2 + (3\bar{\alpha}_2 + 2\bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_5 - 4\bar{\alpha}_6^2 + 5\bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_6 + \chi_3) \bar{\alpha}_4^2 \\
 & + (2\bar{\alpha}_5^3 + (\bar{\alpha}_2 + 2\bar{\alpha}_3) \bar{\alpha}_5^2 - (2\bar{\alpha}_6^2 + 6\bar{\alpha}_6 \bar{\alpha}_2 + \chi_3) \bar{\alpha}_5 - 5\bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_6^2 - \chi_3 \bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_4 \\
 & + 2(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_5^3 + ((2\bar{\alpha}_1 - 2\bar{\alpha}_6 + \bar{\alpha}_2) \bar{\alpha}_6 + \chi_3) \bar{\alpha}_5^2 \\
 & - ((2\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2) \bar{\alpha}_6^2 + \chi_3 \bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_5 - 2(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) \bar{\alpha}_6^3 - \chi_3 \bar{\alpha}_6^2
 \end{aligned}
 \tag{F.8}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_3 \chi_1 \chi_2 = & -2(\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3) \bar{\alpha}_4^3 \\
 & + (4\bar{\alpha}_5^2 - (2\bar{\alpha}_6 + 5\bar{\alpha}_3) \bar{\alpha}_5 - 2\bar{\alpha}_6^2 - (2\bar{\alpha}_2 + 3\bar{\alpha}_3) \bar{\alpha}_6 - \chi_3) \bar{\alpha}_4^2 \\
 & - ((5\bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_5^2 + (6\bar{\alpha}_6 \bar{\alpha}_3 + \chi_3) \bar{\alpha}_5 - 2\bar{\alpha}_6^3 - (\bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_2) \bar{\alpha}_6^2 + \chi_3 \bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_4 \\
 & - 2(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3) \bar{\alpha}_5^3 - (2\bar{\alpha}_6^2 + (2\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_3) \bar{\alpha}_6 + \chi_3) \bar{\alpha}_5^2 \\
 & + (2\bar{\alpha}_6^3 + (2\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3) \bar{\alpha}_6^2 - \chi_3 \bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_5 + 2(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) \bar{\alpha}_6^3 + \chi_3 \bar{\alpha}_6^2
 \end{aligned}
 \tag{F.9}$$

$$2\bar{\eta}_4 \chi_1 = -\bar{\alpha}_4^2 + \bar{\alpha}_5^2 + \bar{\alpha}_6^2 + \bar{\alpha}_4 \bar{\alpha}_5 + \bar{\alpha}_4 \bar{\alpha}_6 + \bar{\alpha}_5 \bar{\alpha}_6
 \tag{F.10}$$

$$2\bar{\eta}_5 \chi_1 = \bar{\alpha}_4^2 - \bar{\alpha}_5^2 + \bar{\alpha}_6^2 + \bar{\alpha}_4 \bar{\alpha}_5 + \bar{\alpha}_4 \bar{\alpha}_6 + \bar{\alpha}_5 \bar{\alpha}_6
 \tag{F.11}$$

$$2\bar{\eta}_6 \chi_1 = \bar{\alpha}_4^2 + \bar{\alpha}_5^2 - \bar{\alpha}_6^2 + \bar{\alpha}_4 \bar{\alpha}_5 + \bar{\alpha}_4 \bar{\alpha}_6 + \bar{\alpha}_5 \bar{\alpha}_6
 \tag{F.12}$$

où

$$\begin{aligned}
 \chi_1 = & (\bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_5)(\bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_6)(\bar{\alpha}_5 + \bar{\alpha}_6) \\
 \chi_2 = & \chi_3 + 2(\bar{\alpha}_5 + \bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_1 + 2(\bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_6) \bar{\alpha}_2 \\
 & + 2(\bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_5) \bar{\alpha}_3 + 4\bar{\alpha}_4 \bar{\alpha}_5 + 4\bar{\alpha}_4 \bar{\alpha}_6 + 4\bar{\alpha}_5 \bar{\alpha}_6 \\
 \chi_3 = & \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3
 \end{aligned}
 \tag{F.13}$$

<sup>1</sup>Calculs réalisés à l'aide du logiciel Maple.



## Annexe G

# Profil de Vialov (1958)

Dans cette annexe, nous présentons les hypothèses qui permettent d'obtenir l'équation du profil de la surface de Vialov (1958), ainsi que les champs de vitesses associés. Nous étudions les écoulements plan et axisymétrique.

Dans l'hypothèse de l'approximation de la couche mince (Hutter, 1983; Morland, 1984; Ritz, 1992), le développement à l'ordre 0 en fonction du rapport d'aspect<sup>1</sup>  $\epsilon$  de la calotte permet d'obtenir une expression analytique de la surface et des vitesses pour un écoulement stationnaire de glace isotrope.

Pour les écoulements en déformation plane et axisymétrique, les équations de l'équilibre quasi-statique (6.5) se réduisent pour l'ordre 0 à :

$$(G.1) \quad \left| \begin{array}{l} \bar{S}_{12,2} = -\bar{p}_{,1} \\ \bar{p}_{,2} = \rho g \end{array} \right. .$$

Ces équations s'intègrent, pour donner :

$$(G.2) \quad \left| \begin{array}{l} \bar{p} = \rho g(x_2 - H(x_1)) \\ \bar{S}_{12} = \rho g H(x_1)_{,1} (x_2 - H(x_1)) \end{array} \right. ,$$

où  $H$  désigne l'épaisseur de la calotte.

Le comportement de la glace isotrope linéaire, à l'ordre 0 se réduit à :

$$(G.3) \quad \bar{S}_{12} = \frac{1}{B_1} \bar{u}_{1,2},$$

ce qui permet, en remplaçant  $\bar{S}_{12}$  dans (G.3) par son expression (G.2)<sub>2</sub>, d'obtenir l'expression suivante pour la vitesse horizontale :

$$(G.4) \quad \bar{u}_1 = \rho g B_1 H(x_1)_{,1} \left( \frac{x_2}{2} - H(x_1) \right) x_2.$$

En supposant une accumulation  $b$  constante en surface, l'intégration de l'équation d'incompressibilité (6.11) ou (6.14) par rapport à  $x_2$  et deux fois par rapport à  $x_1$  conduit

---

<sup>1</sup>Rapport de l'épaisseur à la longueur caractéristiques, de l'ordre de  $10^{-3}$ .

à l'équation de la surface de Vialov (1958). En posant  $H(x_1) = H$ , cette équation s'écrit (Ritz, 1992) :

$$(G.5) \quad H^4 = H_0^4 - \xi b \frac{3}{\rho g B_1} x_1^2,$$

où  $\xi = 2$  pour l'écoulement plan et  $\xi = 1$  pour l'écoulement axisymétrique.

La vitesse horizontale est calculée à partir de (G.4), ce qui permet alors d'obtenir l'expression de la vitesse verticale en intégrant selon  $x_2$  l'équation d'incompressibilité, soit :

$$(G.6) \quad \begin{cases} \bar{u}_1 = \xi b \frac{3x_1 x_2}{2H^2} \left(1 - \frac{x_2}{2H}\right) \\ \bar{u}_2 = -\xi b \frac{3}{2} \frac{x_2^2}{H^2} \left( \xi \left(1 - \frac{x_2}{3H}\right) - \left(1 - \frac{H_0^4}{H^4}\right) \left(1 - \frac{x_2}{2H}\right) \right) \end{cases}.$$

La longueur  $L$  de la calotte est obtenue à partir de l'équation de la surface (G.5) en résolvant  $H(L) = 0$ , soit

$$(G.7) \quad L = \left( \frac{\rho g B_1}{3\xi b} \right)^{1/2} H_0^2.$$

Les équations (G.5) et (G.6) montrent que les deux types d'écoulement (déformation plane ou axisymétrique) conduisent à la même famille de surfaces.

Si l'accumulation de l'écoulement axisymétrique est le double de celle de l'écoulement plan alors les surfaces sont identiques. Dans ces conditions ( $b_{axi} = 2b_{2D} = \xi b$ ), d'après (G.6), les vitesses horizontales sont aussi identiques, tandis que la vitesse verticale de l'écoulement axisymétrique est supérieure à celle de l'écoulement plan.

Par contre, pour une même accumulation de surface ( $b_{axi} = b_{2D}$ ) et une même hauteur au dôme, la calotte de l'écoulement axisymétrique est deux fois plus longue que celle de l'écoulement plan. Les vitesses horizontales sont alors deux fois plus grandes dans le cas axisymétrique que dans le cas plan.



# Bibliographie

- Alley, R. B. (1992). Flow-law hypotheses for ice-sheet modeling. *J. Glaciol.*, **38**(129), 245–256.
- Anandakrishnan, S., Fitzpatrick, J. J., Alley, R. B., Gow, A. J., and Meese, D. A. (1994). Shear-wave detection of asymmetric c-axis fabrics in the GISP2 ice core, Greenland. *J. Glaciol.*, **40**(136), 491–496.
- Anderman, I. (1982). *Lois du comportement d'une roche glace anisotrope en régime stationnaire*. Ph.D. thesis, Thèse de troisième cycle de l'Université scientifique et médicale de Grenoble.
- Azuma, N. (1994). A flow law for anisotropic ice and its application to ice sheets. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **128**, 601–614.
- Azuma, N. (1995). A flow law for anisotropic polycrystalline ice under uniaxial compressive deformation. *Cold Reg. Sci. Technol.*, **23**, 137–147.
- Azuma, N. and Goto-Azuma, K. (1996). An anisotropic flow law for ice-sheet ice and its implications. *Ann. Glaciol.*, **23**, 202–208.
- Beaudoin, A. J., Mathur, K. K., Dawson, P. R., and Johnson, G. C. (1993). Three-dimensional deformation process simulation with explicit use of polycrystalline plasticity models. *Int. J. Plast.*, **9**, 833–860.
- Bernal, J. D. and Fowler, R. H. (1933). A theory of water and ionic solutions with particular reference to hydrogen and hydroxyl ion. *J. Chem. Phys.*, **10**, 587–600.
- Boehler, J. P. (1975). *Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes*. Ph.D. thesis, Thèse de Doctorat d'Etat es sciences de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- Boehler, J. P. (1978). Lois de comportement anisotrope des milieux continus. *Journal de mécanique*, **17**(2), 153–190.
- Bolzan, J. F. and Strobel, M. (1994). Accumulation-rate variations around Summit, Greenland. *J. Glaciol.*, **40**(134), 56–66.

- Castelnau, O. (1996). *Modélisation du comportement mécanique de la glace polycristalline par une approche auto-cohérente ; application au développement de textures dans les glaces des calottes polaires*. Ph.D. thesis, Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I.
- Castelnau, O. and Duval, P. (1994). Simulations of anisotropy and fabric development in polar ices. *Ann. Glaciol.*, **20**, 277–282.
- Castelnau, O., Thorsteinsson, T., Kipfstuhl, J., Duval, P., and Canova, G. R. (1996a). Modelling fabric development along the GRIP ice core, central Greenland. *Ann. Glaciol.*, **23**, 194–201.
- Castelnau, O., Duval, P., Lebensohn, R. A., and Canova, G. (1996b). Viscoplastic modeling of texture development in polycrystalline ice with a self-consistent approach : Comparison with bound estimates. *J. Geophys. Res.*, **101**(6), 13,851–13,868.
- Chastel, Y. B., Dawson, P. R., Wenk, H.-R., and Bennett, K. (1993). Anisotropic convection with implications for the upper mantle. *J. Geophys. Res.*, **98**(10), 17,557–17,771.
- Dahl-Jensen, D., Johnsen, S. J., Hammer, C. U., Clausen, H. B., and Jouzel, J. (1993). Past accumulation rates derived from observed annual layers in the GRIP ice core from summit, central Greenland. *NATO ASI Ser., Ser. I*, **12**, 517–531.
- Dansgaard, W., Johnsen, S. J., Clausen, H. B., Dahl-Jensen, D., Gundestrup, N. S., Hammer, C. U., Hvidberg, C. S., Steffensen, J. P., Sveinbjörnsdottir, A. E., Jouzel, J., and Bond, G. (1993). Evidence for general instability of past climate from a 250 kyr ice-core record. *Nature*, **364**, 218–220.
- Dawson, P. R. and Beaudoin, A. J. (1998). Finite element simulations of metal forming. In *Texture and Anisotropy. Preferred orientations in polycrystals and their effect on materials properties*, pages 297–305. Cambridge University Press (ISBN 0 521 46516 8).
- Dhatt, G. and Touzot, G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne, Maloine S.A. Editeur (ISBN 2 224 00924 0).
- Doake, C. S. M. and Wolff, E. W. (1985). Flow law in polar ice sheets. *Nature*, **314**, 255–257.
- Drewry, D. J., Jordan, S. R., and Jankowski, E. (1982). Measured properties of the Antarctic ice sheet: surface configuration, ice thickness, volume and bedrock characteristics. *Ann. Glaciol.*, **3**, 83–91.

- Duval, P. (1981). Creep and fabrics of polycrystalline ice under shear and compression. *J. Glaciol.*, **27**(95), 129–140.
- Duval, P. and Castelnau, O. (1995). Dynamic recrystallization of ice in polar ice sheets. *J. Physique IV (suppl. J. Phys. III), C3*, **5**, 197–205.
- Duval, P. and Le Gac, H. (1982). Mechanical behaviour of Antarctic ice. *Ann. Glaciol.*, **3**, 92–95.
- Duval, P., Ashby, M. F., and Anderman, I. (1983). Rate-controlling processes in the creep of polycrystalline ice. *J. of Phys. Chem.*, **87**(10), 4066–4074.
- Elvin, A. A. (1996). Number of grains required to homogenize elastic properties of polycrystalline ice. *Mech. Mat.*, **22**(1), 51–64.
- Fabre, A. (1997). *Modélisation 3D de l'écoulement des calottes glaciaires. Application à la calotte du Groenland et aux calottes polaires de l'Hémisphère nord au Dernier Maximum Glaciaire*. Ph.D. thesis, Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I.
- Fabre, A., Ritz, C., and Ramstein, G. (1997). Modelling of last Glacial Maximum ice sheets using different accumulation parametrizations. *Ann. Glaciol.*, **24**, 223–228.
- Fowler, A. C. and Larson, D. A. (1980). The uniqueness of steady state flows of glacier and ice sheets. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **63**, 333–345.
- Fujita, S., Nakawo, M., and Mae, S. (1987). Orientation of the 700m Mizuho core and its strain history. *Proceedings of the National Institute of Polar Research Symposium on Polar Meteorology and Glaciology*, **1**, 122–131.
- Gagliardini, O. and Meyssonier, J. (1997). Flow simulation of a firn-covered cold glacier. *Ann. Glaciol.*, **24**, 242–247.
- Gagliardini, O. and Meyssonier, J. (1999). Analytical derivations for the behaviour and fabric evolution of a linear orthotropic ice polycrystal. *J. Geophys. Res.*, **104**(B8), 17,797–17,809.
- Gilormini, P., Roudier, P., and Rougée, P. (1993). Les déformation cumulées tensorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, **316**, 1499–1504.
- Gödert, G. and Hutter, K. (1998). Induced anisotropy in large ice shields: Theory and its homogenization. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **10**, 293–318.
- Gow, A. J., Meese, D. A., Alley, R. B., Fitzpatrick, J. J., Anandakrishnan, S., Woods, G. A., and Elder, B. C. (1997). Physical and structural properties of the greenland ice sheet project 2 ice core: A review. *J. Geophys. Res.*, **102**(C12), 26,559–26,575.

- Greve, R. and Hutter, K. (1995). Polythermal three-dimensional modelling of the Greenland ice sheet with varied geothermal heat flux. *Ann. Glaciol.*, **21**, 8–12.
- Gundestrup, N. S., Dahl-Jensen, D., Johnsen, S. J., and Rossi, A. (1993). Bore-hole survey at dome GRIP 1991. *Cold Reg. Sci. Technol.*, **21**, 399–402.
- Harren, S. V., Dève, H. E., and Asaro, R. J. (1988). Shear band formation in plane strain compression. *Acta. Metall.*, **36**(9), 2435–2480.
- Hempel, L. and Thyssen, F. (1992). Deep radio echo sounding in the vicinity of GRIP and GISP2 drill sites, Greenland. *Polarforschung*, **61**(1), 11–16.
- Herron, S. L. and Langway, C. C. J. (1982). A comparison of ice fabrics and textures at camp Century, Greenland and Bird Station, Antarctica. *Ann. Glaciol.*, **3**, 118–124.
- Hodge, S. M., Wright, D. L., Bradley, J. A., Jacobel, R. W., Skou, N., and Vaughn, B. (1990). Determination of the surface and bed topography in central Greenland. *J. Glaciol.*, **36**(122), 17–30.
- Hutter, K. (1981). The effect of longitudinal strain on the shear stress of an ice sheet. in defence of using stretched coordinates. *J. Glaciol.*, **27**(95), 227–270.
- Hutter, K. (1983). *Theoretical Glaciology: material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets*. D. Reidel Publishing Company, Terra Scientific Publishing Company (ISBN90 277 1473 8).
- Hutter, K. (1993). Thermo-mechanically coupled ice-sheets response-cold, polythermal, temperate. *J. Glaciol.*, **39**(131), 65–86.
- Hutter, K., Yakowitz, S., and Szidarovszky, F. (1986). A numerical study of plane ice-sheet flow. *J. Glaciol.*, **32**(111), 139–160.
- Jacka, T. H. (1984). The time and strain required for development of minimum strain rates in ice. *Cold Reg. Sci. Technol.*, **3**, 261–268.
- Jacobel, R. W. and Hodge, S. M. (1995). Radar internal layers from the greenland summit. *Geophys. Res. Letters*, **22**(5), 587–590.
- Johnsen, S. J., Clausen, H. B., Dansgaard, W., Fuhrer, K., Gundestrup, N., Hammer, C. U., Iversen, P., Jouzel, J., Stauffer, B., and Steffensen, J. P. (1992). Irregular glacial interstadials recorded in a new Greenland ice core. *Nature*, **359**, 311–313.
- Kamb, W. B. (1961). The glide direction in ice. *J. Glaciol.*, **3**(30), 1097–1106.

- Keller, K., Gundestrup, N., Dahl-Jensen, D., Tscherning, C. C., Forsberg, R., and Ekholm, S. (1995). The ice deformation and mass balance at the summit of Greenland as determined by GPS and gravity measurements. *Mass balance and related topics of the Greenland ice sheet, edited by F. Obleitner and O.B. Olesen, Open File Ser., 95/5*, 15–18. Grønlands Geol. Unders., Copenhagen, Denmark, 1995.
- Kocks, U. F., Kallend, J. S., and Biondo, A. C. (1991). Accurate representations of general textures by a set of weighted grains. *Textures Microstruct.*, **14**(18), 199–204.
- Kocks, U. F., Tomé, C. N., and Wenk, H. (1998). *Texture and Anisotropy. Preferred orientations in polycrystals and their effect on materials properties*. Cambridge University Press (ISBN 0 521 46516 8).
- Le Gac, H. (1980). *Contribution à la détermination des lois de comportement de la glace polycristalline (anélasticité et plasticité)*. Ph.D. thesis, Thèse de troisième cycle de l'Université scientifique et médicale de Grenoble.
- Lebensohn, R. A. and Tomé, C. N. (1993). A self-consistent viscoplastic model: prediction of rolling textures of anisotropic polycrystals. *Mat. Sci. and Engin., A*, **175**, 71–82.
- Lipenkov, V. Y., Barkov, N. I., Duval, P., and Pimienta, P. (1989). Crystalline texture of the 2083m ice core at Vostock Station, Antarctica. *J. Glaciol.*, **35**(121), 392–398.
- Lipenkov, V. Y., Salamatin, A. N., and Duval, P. (1997). Bubbly-ice densification in ice sheets: II. Applications. *J. Glaciol.*, **43**(145), 397–407.
- Lliboutry, L. (1987). *Very slow flow of solids*. Mechanics of fluids and transport processes. Martinus Nijhoff Publishers (ISBN 90 247 3482 7).
- Lliboutry, L. (1993). Anisotropic, transversely isotropic non linear viscosity of rock ice and rheological parameters inferred by homogenization. *Int. J. Plast.*, **9**, 619–632.
- Lliboutry, L. and Duval, P. (1985). Various isotropic and anisotropic ices found in glacier and polar ice caps and their corresponding rheologies. *Annales Geophysicae*, **3**(2), 207–224.
- Mangeney, A. (1996). *Modélisation de l'écoulement de la glace dans les calottes polaires : prise en compte d'une loi de comportement anisotrope*. Ph.D. thesis, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- Mangeney, A., Califano, F., and Castelnau, O. (1996). Isothermal flow of an anisotropic ice sheet in the vicinity of an ice divide. *J. Geophys. Res.*, **101**(12), 28,189–28,204.

- Mangeney, A., Califano, F., and Hutter, K. (1997). A numerical study of anisotropic, low Reynolds number, free surface flow of ice sheet modeling. *J. Geophys. Res.*, **102**(B10), 22,749–22,764.
- Mathur, K. K., Dawson, P. R., and Kocks, U. F. (1990). On modeling anisotropy in deformation processes involving polycrystals with distorted grain shape. *Mech. Mater.*, **10**, 183–202.
- Meese, D. A., Gow, A. J., Grootes, P. M., Mayewski, P. A., Ram, M., Stuiver, M., Taylor, K. C., Waddington, E. D., and Zielinski, G. A. (1994). The accumulation record from the GISP2 core as an indicator of climate change throughout the Holocene. *Science*, **266**, 1680–1682.
- Meese, D. A., Gow, A. J., Alley, R. B., Zielinski, G. A., Grootes, P. M., Ram, M., Taylor, K. C., Mayewski, P. A., and Bolzan, J. F. (1997). The Greenland Ice Sheet Project 2 depth-age scale: Methodes and results. *J. Geophys. Res.*, **102**(C12), 26,411–26,423.
- Meyssonier, J. (1983). *Écoulement de la glace sur un lit de forme simple : expérience, modélisation, paramétrisation du frottement*. Ph.D. thesis, Thèse de Doctorat d'Etat es sciences de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- Meyssonier, J. (1989). Ice flow over a bump : experiment and numerical simulations. *J. Glaciol.*, **35**(119), 85–88.
- Meyssonier, J. and Goubert, A. (1994). Transient creep of polycrystalline ice under uniaxial compression : an assessment of internal state variable models. *Ann. Glaciol.*, **19**, 55–62.
- Meyssonier, J. and Philip, A. (1996). A model for the tangent viscous behaviour of anisotropic polar ice. *Ann. Glaciol.*, **23**, 253–261.
- Molinari, A. and Tóth, L. S. (1994). Tuning a self-consistent viscoplastic model by finite element results. *Acta metall. mater.*, **42**(7), 2453–2458.
- Molinari, A., Canova, G. R., and Ahzy, S. (1987). A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta metall.*, **35**(12), 2983–2994.
- Morland, L. W. (1984). Thermomechanical balance of ice sheet flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **29**, 237–266.
- Morland, L. W. and Staroszczyk, R. (1998). Viscous response of Polar ice with evolving fabric. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **10**, 115 – 120.
- Moussy, F. and Franciosi, P. (1990). *Physique et mécanique de la mise en forme des matériaux*. Ecole d'été d'Oléron. Presses du CNRS (ISBN 2 87682 023 4).

- Petrenko, V. F. and Whitworth, R. W. (1994). Structure of ordinary ice Ih. part II : Defects in ice. volume 2 : Dislocations and plane defects. *CRREL Special Report*, **94**(12).
- Pimienta, P. (1987). *Etude du comportement mécanique des glaces polycristallines aux faibles contraintes ; applications aux glaces des calottes polaires*. Ph.D. thesis, Thèse de troisième cycle de l'Université scientifique et médicale de Grenoble.
- Pimienta, P., Duval, P., and Lipenkov, V. Y. (1987). Mechanical behaviour of anisotropic polar ice. In *International Association of Hydrological Sciences, Publication 170 (Symposium on The Physical Basis of Ice Sheet Modelling, Vancouver)*, pages 57–66.
- Plé, O. (1998). *Contribution à l'étude de l'endommagement de la glace colonnaire S2 en compression uniaxiale*. Ph.D. thesis, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I.
- Ritz, C. (1992). *Un modèle thermo-mécanique d'évolution pour le bassin glaciaire Antarctique Vostok - Glacier Byrd : sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus*. Ph.D. thesis, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I.
- Rougée, P. (1997). *Mécanique des grandes transformations*. Mathématiques et Applications 25. Springer-Verlag (ISBN 3 540 62691 3).
- Russell-Head, D. S. and Budd, W. F. (1979). Ice-sheet flow properties derived from bore-hole shear measurements combined with ice-core studies. *J. Glaciol.*, **24**(90), 117–130.
- Sachs, G. (1928). Zur Ableitung einer Fließbedingung. *Z. Verein Deutscher Ing.*, **72**, 734–736.
- Schott, C., Waddington, E. D., and Raymond, C. F. (1992). Predicted time-scales for GISP2 and GRIP boreholes at Summit, Greenland. *J. Glaciol.*, **38**(128), 162–168.
- Schott Hvidberg, C. (1996). Steady-state thermomechanical modelling of ice flow near the centre of large ice sheets with the finite-element technique. *Ann. Glaciol.*, **23**, 116–123.
- Schott Hvidberg, C., Dahl-Jensen, D., and Waddington, E. D. (1997). Ice flow between the GRIP and GISP2 boreholes in Central Greenland. *J. Geophys. Res.*, **102**(C12), 26,851–26,859.
- Staroszczyk, R. and Gagliardini, O. (1999). Two orthotropic models for strain-induced anisotropy of polar ice. *J. Glaciol.*, **45**(151), 485 – 494.

- Staroszczyk, R. and Morland, L. W. (2000). Orthotropic viscous response of polar ice. *Journal of Engineering Mathematics*, **37**, 191 – 209.
- Svendsen, B. and Hutter, K. (1996). A continuum approach for modelling induced anisotropy in glaciers and ice sheets. *Ann. Glaciol.*, **23**, 262–269.
- Teodosiu, C., Raphanel, J. L., and Tabourot, L. (1993). Finite element simulation of the large elastoplastic deformation of multicrystals. in *Teodosiu C., Raphanel J.L. and F. Sidoroff, eds. MECAMAT*, **91**, 153–168.
- The Greenland Summit Ice Cores CD-ROM (1997). *Available from the National Snow and Ice Data Center, University of Colorado at Boulder, and the World Data Center-A for Paleoclimatology, National Geophysical Data Center, Boulder, Colorado.*
- Thorsteinsson, T., Kipfstuhl, J., and Miller, H. (1997). Textures and fabrics in the GRIP ice core. *J. Geophys. Res.*, **102**(C12), 26,583–26,600.
- Van der Giessen, E. and Van Houtte, P. (1992). A 2D analytical multiple slip model for continuum texture development and plastic spin. *Mech. Mat.*, **13**(2), 93–115.
- Van der Veen, C. J. and Whillans, I. M. (1994). Development of fabric in ice. *Cold Reg. Sci. Technol.*, **22**(2), 171–195.
- Vialov, S. S. (1958). Regularities of glacial shields movements and the theory of plastic viscous flow. *Physics of the movements of ice IAHS*, **47**, 266–275.
- Waddington, E., Morse, D., Alley, R., Anandakrishnan, S., Bolzan, J., Clow, G., Cuffey, K., Cunningham, J., Dahl-Jensen, D., Firestone, J., Gundestrup, N., Hodge, S., Hvidberg, C. S., Jacobel, R., Nereson, N., Raymond, C., and Taylor, K. (1995). The role of Glacier Geophysics in the GISP2 ice-core program. *Artic Research of the US*, **9**, 10–19.